線形空間論入門

明松真司
Akematsu Shinji

プレアデス出版

まえがき

著者が線形代数という学問に初めて触れたのは，高専 (著者は普通高校ではなく，高専を卒業している) 3 年生のときだった．高専 2 年生のときまでは「数学」というものに全く魅力を感じていなかった著者だが，3 年生になるのと同時に恩師と偶然に出会い，その講義を聞いて一気に数学への興味が深まったのを覚えている．そして，「本格的に数学を勉強したい」という相談をその恩師にした際，勧められたのが「線形代数」という数学の分野だった．このような経緯で，線形代数は私が生まれて初めて「腰を据えて向き合った」数学である．だから，線形代数に対しては大きな思い入れがあるし，同時に，すごく面白い数学の一分野だとも思っている．

しかし，学校の講義などではじめて「線形代数」と対峙したとき，思わずたじろいでしまう学生がきわめて多いのも事実だと思う．というのも，実際に自分もそうだったのだ．著者は初めて線形代数の教科書を目の前にして，真っ先に「一体何のためにやってるんだ，これって」ということを心の底から感じた記憶がある．確かに線形代数は，やや「キャッチーさ」に欠ける一面があるようである．

ところが，著者がそれでもなんとか必死で教科書を読み進めて行くと，「あれ，何だかここは面白いかもしれない」と感じる瞬間に何度か出会うことがあった．そして，「ある概念」に出会ったとき，ものすごく大きな感動と衝撃を受けたのをハッキリとおぼえている．今思えば，これが数学の「本質の面白さ」に気づいた初めての瞬間だったかもしれない．「線形空間」との出

会いである．

線形代数は，「向きと大きさを持つ量」を数学的に扱いたい!! という，きわめて簡単な動機から始まる．例えば自動車の速度，エアコンにより発生する風向き，物体にかかる力など，私達の身の回りには「向きと大きさを持つ量」が溢れかえっている．そして，それを数学的に厳密に扱おうとすると，「矢印（有向線分）」を定式化しなければならない．そう，「ベクトル」の登場である．実はこの「ベクトル」の登場こそが，「線形代数」の壮大な世界の始まりなのだ．「ベクトル」はいつしか矢印としての仮の姿を潜めて，我々の身の回りにあふれる様々なものが「実はベクトルだった」ということが明らかになる．著者がこのことを理解したとき，なんと言ったらいいか，まるで今まで立っていた地上から飛び立って，ものすごく広い世界を俯瞰したかのような，そんな感覚になったのを覚えているのだ．

そして思うことは，「たくさんの人に，この感動を味わってほしい」ということだった．ところが，やはり線形代数という学問の若干の敷居の高さも相まって，線形代数の中でも高度な内容である「線形空間論」を簡潔に分かりやすく解説している書籍というのは，なかなか巷には出回っていないようだ．本書には，著者による「ええい，だったら俺が書いてやるわい」という何クソ根性もふんだんに含まれている．

本書は，予備知識ゼロの状態で読み始めた読者が，（根気さえあれば）最終的には「線形写像の次元定理」というひとつの最終目標を「厳密に」理解できる，という構成をとった．この「厳密に」というのがポイントで，本書では「数学的に厳密すぎて少し難しい内容」を「ふわっとした論理のごまかし」で回避することは意図的に避けてある．なので，初学者にとっては，一見しただけだと「うっ... 頭が...」という印象を受けてしまうであろう数式や記号などが本書には多く登場する．が，本書ではその内容についてこれでもかというくらいに「丁寧な解説」を付けた．一見していかつい記述たちも，根気よく読みこめば必ず理解できるように出来ているはずである．また，定理や定義についても，その意味はもちろんのこと，「一体何が嬉しいのか」という部分までなるべく解説を付けることを心がけた．さらに，演習問題とそ

の解答についても，かなりのページ数を使って丁寧なものを収録した．本文中で証明が演習問題に回されている命題や定理も，演習問題の解答を参照すれば必ずその答えが収録されている．本書を読み切るのには少なからず時間と体力を要するとは思うが，最後までお付き合いいただければ必ず，読者の中での「数学観」に何かしらの変化が起こるはずである．ちなみに，ある程度の予備知識があるという読者は，1 章，2 章あたりはぱらぱらっと流し読みをする程度で終えていただいても問題なく先に進めるだろう．

そして，あらかじめ断っておかなければならない大切なことがある．本書では，多くの線形代数の教科書でほぼ確実に取り上げられる「行列式」，「固有値，固有ベクトル」，「対角化」などの内容を一切取り上げていない．この理由は，あくまで本書で目標とする理論が「線形空間論」だということだ．もちろん，「線形空間を理解するために，こんなものは全く必要がないから全部カットだー！」ということではなく，「線形空間の本質を理解するために，とりあえず無くても事足りる」という内容を，「最短経路で線形空間論にたどり着く」ために思い切ってそぎ落としてみた，ということである．つまり，この教科書はそういう意味で「王道の教科書」では全くない．これは自分としては少しこわいチャレンジではあったのだが，あえて少し斬新な内容構成を取ってみることにした．

本書が読者のみなさまにとっての「感動のキッカケ」になってくれることを心よりお祈りしながら，まえがきを終えようと思う．さあ，線形空間論の素晴らしい世界に一緒に踏みだそう．

平成 26 年 3 月 24 日　明松真司

目次

第1章

ベクトル，行列

本書の目標は，**線形空間**についての解説だ．「線形空間」とは，高校や大学初年度で学ぶ「ベクトル，行列のはなし」をもとにして出来る非常に壮大で面白く，身近な数学的対象である．だが同時に線形空間の理論は，初学者には少し敷居の高い「高度な内容」を多く含んでいる．よって，線形空間についてしっかりと理解をするためには，ベースとなる「ベクトル，行列」についての基本的な知識が必要不可欠である．

なので，本書ではまず最初に，ベクトル，行列についての解説をおこなう章を設けた．本書を読むにあたり特別な予備知識は必要とされないので，ベクトル，行列についての予備知識がない読者は，まずはこの章の内容をしっかりと理解することから初めてみてほしい．

また，これらの内容については「わざわざ復習するまでもない！」という読者は，この章をさらっと流し読みで済ませていただいて構わない．

壮大な理論には「確固たる土台」が必要だ．せっかく積み上げた積み木が崩れてしまわないように，まずはしっかりと「土台の構築」を済ませよう!!

1.1　基本的な記法

これからいろいろな事柄を数学的に述べるとき，本書を通じて用いる記号，記法を最初に述べる．

1.1.1　定義

まず，本書を通じていろいろな数学的な事柄を「定義」するときに使う記号を決めておこう．左辺を右辺によって定義するときに，

$$(\text{左辺}) \overset{\text{def}}{=} (\text{右辺}).$$

と表すことにする．例をひとつ挙げてみると，

$$N \overset{\text{def}}{=} (\text{日本の総人口}).$$

は「N を日本の総人口として定義する」のように読んでほしい．

1.1.2　集合

ものの集まりのことを**集合 (set)** と呼び，集合に属しているものを**元 (element)** と呼ぶ．ある元 a が集合 A に**属する**ことを，次のように表す．

$$a \in A.$$

また，集合 A に属する要素の個数を $|A|$ と表す．集合 B のすべての元が，集合 A の元であるとき (すなわち，すべての $b \in B$ に対して，$b \in A$ が成り立つとき)，B は A の**部分集合 (subset)** であるといい，次のように表す．

$$B \subset A.$$

$B \subset A$ は，集合 B が集合 A にすっぽり含まれていることを意味している．そして，$B \subset A$ かつ $A \subset B$ のとき，A と B は**等しい**といい，$A = B$ と書く．

集合 A, B に対して，A, B の**和集合 (union)** $A \cup B$, **共通部分 (intersection)** $A \cap B$ を，次のように定義しよう (図 1.1, 1.2).

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}.$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

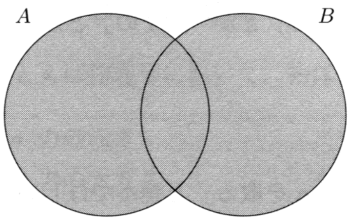


図 1.1　$A \cup B$ (塗りつぶした部分)

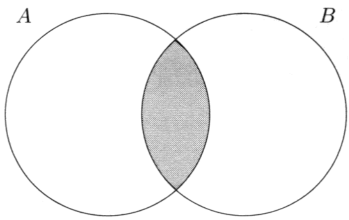


図 1.2　$A \cap B$ (塗りつぶした部分)

また，元を持たない集合を $\varnothing$ と書き，**空集合 (empty set)** と呼ぶ.

1.1.3　数の集合

数学で登場するさまざまな**数 (number)** を扱うために，「数の集合」を決めておくと便利である．よって，次のように数の集合を定義し，本書を通じて使うことにする.

$\mathbb{N}$	**自然数 (0 は含まない)** 全体の集合
$\mathbb{Z}$	**整数**全体の集合
$\mathbb{Q}$	**有理数**全体の集合
$\mathbb{R}$	**実数**全体の集合
$\mathbb{C}$	**複素数**全体の集合

1.1.4 論理記号

命題や条件を記述するとき，**論理記号**を使って，記述をコンパクトにできることがある．代表的な論理記号をいくつか紹介しておこう．

全称記号 $\forall$ は，「任意の」という意味を持つ記号[*1]である．「任意の」というのは，砕けて言ってみると「何でも良いので」とか「全ての」とかいう意味だと思ってくれれば良い．たとえば，

$$\forall a \in A$$

と書いたら，「何でも良いので，集合 A の元 a を取る」と読んでほしい．

存在記号 $\exists$ は，「存在する」という意味を持つ記号[*2]である．例えば，

$$\exists a \in A$$

と書いたら，「集合 A にある元 a が存在する」と読むのである．

存在記号とよくセットで使われる記法として，s.t. というものがある．これは，such that の略で，「どんなものかというと」と読めば良い．例えば，

$$\exists a \in A \text{ s.t. } a > 0$$

は，「集合 A にある元 a が存在する．それはどんなものかというと，$a > 0$ を満たすものである．」と読めば良い．こんな風に，論理記号を使うと，日本語の長い文章がすっきりコンパクトに表せるのだ[*3]．

命題 P, Q に対して，「P が成り立つなら，Q が成り立つ」というのを，$P \Rightarrow Q$ と表す．また，$P \iff Q$ は，$P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$ という意味だ．

[*1] $\forall$ は，「任意の」という意味を表す英単語 “any” の頭文字の A を逆向きにしたもの．

[*2] $\exists$ は，「存在」という意味を表す “exist” の頭文字の E を逆向きにしたもの．

[*3] 本書では，特に遠慮なく論理記号を使うことにする．最初は読みにくくて戸惑うかもしれない．が，論理記号は慣れたら必ず使いこなせるようになるし，日本語の長い文章を書く労力の削減になる．何より，$\forall, \exists$ を華麗に使いこなせるのって，なんか，かっこいいじゃないか．

$P \iff Q$ であるとき，P と Q は**同値 (equivalent)** とか，P は Q であるため (Q は P であるため) の**必要十分条件**であるという．

今までに述べた記号や定義は，本書を通していたるところに出現するので，もし意味を忘れてしまったら，いつでもここに戻ってきて確認をしよう．

1.2　向きと大きさを持つ量

たとえば物理学において，物体にかかる力を数学的に記述したいとき，

- 力の向き
- 力の大きさ

の両方を表現する必要がある．また，物体に力を加えたときに生じる運動 (速度）を，再び数学的に表現したいときにも，

- 運動の向き
- 運動の速さ

を，やはり表現しなければならない．このことからもわかるように，「大きさ」と「向き」を持つ量というのは，様々な事柄を数学的に表現したいときにきわめて重要な役割を演じる．そして，それを実現する量というのが，まさに**ベクトル (vector)** であった．

1.3　ベクトルの定義

例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ -e \end{pmatrix}$$

のように，実数を縦に 2 つ並べた組として表される量を，**2 次元実数ベクトル**と呼ぶ．今，実数 v_1, v_2 を並べてできる

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

というベクトルに対し，第1成分 v_1 を x 座標，第2成分 v_2 を y 座標と対応付けて，2次元実数ベクトルは図1.3のように，xy 平面上の点 (v_1, v_2) を指す有向線分と対応させることができる．また，平面上で図1.3のベクトルを平行移動しても，x 方向，y 方向の長さは変わらないので，ベクトルは平行移動しても，同じものであると見なす（図1.4）ことにする．

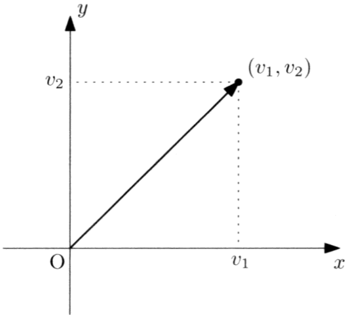


図1.3　平面上のベクトル

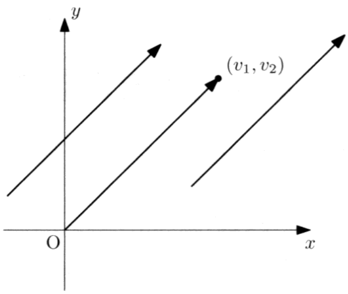


図1.4　これらは全て同じベクトル $\binom{v_1}{v_2}$

ベクトル $v = \binom{v_1}{v_2}$ に対して[*4]，ベクトルの**大きさ (長さ)** $|v|$ は，三平方の定理により，

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

である．また，ベクトル同士の**和**を，次のように「成分同士の和」で定義する．

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}.$$

ベクトル v, w に対して，$v + w$ はやはりベクトルとなり，v, w がつくる平行四辺形の対角線に対応したベクトルになる (図1.5).

[*4] 高校や大学初年度では，ベクトルを「太字で表す」とか,「上に矢印をつけて表す」という流儀が採用されることが多いが，本書では特にそのような流儀は採用しない．実際のところ，大学の数学科などでは，このようなことが多い．

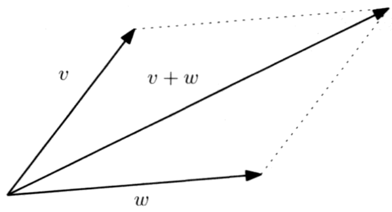


図 1.5　平行四辺形の法則

また，実数 c に対して，ベクトル $v = \binom{v_1}{v_2}$ の**スカラー倍** (c **倍**)[*5] cv を，次のように成分ごとの c 倍で定義する．

$$cv \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \end{pmatrix}.$$

ベクトル cv は，平面上でベクトル v の大きさを c 倍したもの ($c < 0$ なら，cv は v の逆向きになる) に対応する (図 1.6)．

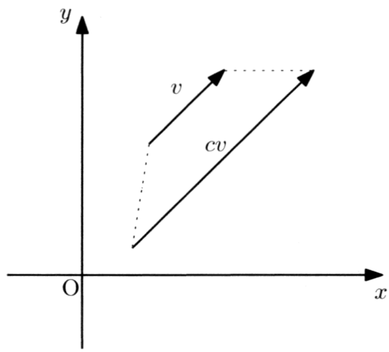


図 1.6　ベクトルのスカラー倍

3 次元の場合も，同様に定義しよう．3 つの実数 v_1, v_2, v_3 を並べた次のよ

[*5] 実数倍，定数倍ともいう．

うな量を，**3 次元実数ベクトル**という．

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

2 次元のときと同様に，第 1 成分 v_1 を 3 次元空間の x 座標，第 2 成分 v_2 を y 座標，第 3 成分 v_3 を z 座標に対応付けることによって，3 次元実数ベクトルは，原点 O から 3 次元空間の点 (v_1, v_2, v_3) を指す有向線分に対応する (図 1.7).

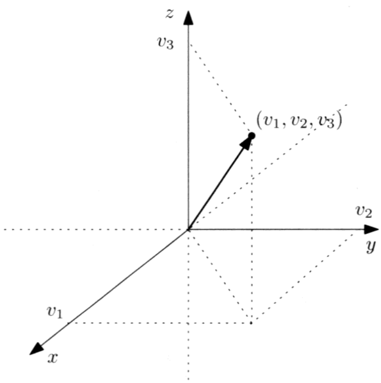


図 1.7　空間のベクトル

3 次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ の大きさ $|v|$ は，

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

により表される．また，ベクトル同士の和とスカラー倍 (c 倍) も，2 次元の

場合と同様に，成分同士の和, c 倍で定義する．

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}, \ c\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ cv_3 \end{pmatrix}.$$

さて，これまでと全く同様に，任意の自然数 n に対して, n 個の実数 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を縦に並べた量

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

を，n **次元実数ベクトル**と名付けよう．我々は頭の中で 3 次元空間までしか想像することができないので，$n \geq 4$ のとき，n 次元実数ベクトルには幾何学的イメージは対応しない．が，大切なのは，

> 幾何学的イメージは対応しなくても，n 次元実数ベクトルという量を“定義”して，“数式の中で扱う”ことはできる!!

ということだ．数式の中でベクトルを扱うのには，別に幾何学的イメージは無くても良いじゃないか!! ということである．

ベクトルの和，スカラー倍 (c 倍) を，今までと同じように定義しよう．

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}, \ c\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}.$$

さらに，n 次元実数ベクトル v の大きさ $|v|$ も，2 次元，3 次元の結果から考

えて，次のように定義[*6]する．

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

そして，次の定義こそが，線形空間論のすべてのスタートとなる．

定義 1.1. (n 次元実数ベクトル空間)
$n \in \mathbb{N}$ に対し，
n **次元実数ベクトル空間** $\mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\overset{\text{def}}{=} \{n \text{ 次元実数ベクトルの全体}\} \\ &= \left\{ v \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, v_1, v_2, \ldots v_n \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

また，全ての成分が 0 であるベクトルを**ゼロベクトル**と呼び，0 で表す．

$$0 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[*6] 2 次元，3 次元実数ベクトルについては，三平方の定理と幾何学的なイメージにより，大きさが $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ で求められるという「結果」が分かった．ところが，一般の n 次元ベクトルには，幾何学的なイメージが対応しているとは限らないので，三平方の定理がどうこうで，大きさを実際に「求める」ことができない．実体をイメージできないのに，幾何学的な「大きさ（長さ）」なんて考えられる訳がないからだ．だからここでは，n 次元ベクトル v の「大きさ」とは $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$ のことだ!! と，思い切って「定義」している，$n = 2, 3$ とすれば，今までの結果とも一致するので，これがとても自然な定義であることは一目瞭然だ．「結果」と「定義」の違いに，注意!!

1.4　ベクトルの線形独立，線形従属

$\underbrace{c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}}_{\text{係数}}, \underbrace{v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n}_{\text{ベクトル}}$ に対して，

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m$$

という形の式を，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ の**線形結合 (linear combination)** という．そして，次の関係式を**線形関係式 (linear relation)** と呼ぶ．

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m = 0.$$

定義 1.2. (ベクトルの線形独立と線形従属)
$c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}, v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ に対して，線形関係式

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m = 0$$

を満たす係数の組 $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ について，

- $(c_1, c_2, \ldots, c_m) = (0, 0, \ldots, 0)$ に限るとき，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は**線形独立 (linearly independent)** であるという．
- $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ である組が存在するとき，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は**線形従属 (linearly dependent)** であるという．

さて，この線形独立，線形従属というのは，どんなに強調しても足りないくらいに大切な概念である．しかし，この定義を見て，線形独立，線形従属がどのような意味を持つのか，すぐには分からない．なので，この定義の意味を考えてみることにしよう．

ベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ が線形独立であるとする．このとき，この中のとある v_i を，v_i 以外の線形結合で表すことができるかどうか？ということを考えてみよう．いま，「仮に表すことができた」とすると，ある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_m$ によって，次のように書けているはずである．

$$v_i = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1} + \ldots + c_mv_m.$$

さて，v_i を移項してみよう．

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{i-1}v_{i-1} - v_i + c_{i+1}v_{i+1} + \ldots + c_mv_m = 0.$$

実はこれはオカシイ．この等式は，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ が線形独立だという仮定に矛盾するのだ．なぜなら，上の等式は，$c_i = -1$ とすれば，次のように書ける．

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m = 0.$$

ところが，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は線形独立だったので，これが満たすような $c_1, c_2, \ldots, c_m$ は，$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$ しか存在しなかったはずだ．しかし，$c_i = -1$ だから，そうはなっていない．さぁ，何がおかしかったのだろう？ 実はそれが，v_i を，v_i 以外の線形結合で表すことができたという仮定である．つまりこれにより，次の大切な事実が示せたことになる．

定理 1.3. 線形独立なベクトルの組の中で，
あるベクトルをそれ以外の線形結合で表すことはできない．

つまり，線形独立なベクトルの組は，誰が欠けてもダメなベクトルの組だ．どれかひとつでもベクトルが欠けてしまったら，他のベクトルがどんなに力を合わせて（線形結合を作りまくって）も，絶対に代役はできない．

さて，線形独立なベクトルの組には，まだ大切な性質がある．

定理 1.4. (線形結合の一意性)
線形独立なベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ について,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_m v_m = c'_1 v_1 + c'_2 v_2 + \ldots + c'_m v_m$$
$$\Rightarrow c_1 = c'_1, c_2 = c'_2, \ldots, c_m = c'_m.$$

すなわち, 線形独立なベクトルの組の線形結合は, 一通りに定まる.

この意味は, 対偶を取ってみると意味が分かりやすい.

$$(c_1, c_2, \ldots, c_m) \neq (c'_1, c'_2, \ldots, c'_m)$$
$$\Rightarrow c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_m v_m \neq c'_1 v_1 + c'_2 v_2 + \ldots + c'_m v_m.$$

このように, 係数の組を違うように選べば, それらによる線形結合は必ず違うベクトルを作り出す. つまり, 係数の組それぞれに対して, 1 対 1 にベクトルがびしっと対応しているのだ. これは, 線形独立なベクトルの組のすごく強力な性質である.

1.5　基底と張る空間

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と置く. このとき, $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\binom{x_1}{x_2}$ は, e_1, e_2 の線形結合で次のように表せる (図 1.8).

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

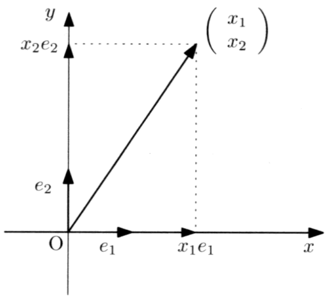


図 1.8　e_1, e_2 を使って $\binom{x_1}{x_2}$ を表す．

さらに，e_1, e_2 は線形独立である．なぜなら，線形関係式

$$c_1e_1 + c_2e_2 = 0$$

を成分を使って書き直すと，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，$c_1 = c_2 = 0$ を得るからである．このように，$\mathbb{R}^2$ のベクトルの組が

- 任意の $\mathbb{R}^2$ の元を，線形結合で表せる．
- 線形独立である．

という性質を満たすとき，このベクトルの組は $\mathbb{R}^2$ の**基底 (basis)** であるという．先ほど述べたように，e_1, e_2 は $\mathbb{R}^2$ のひとつの基底である*7．

これと同じことを，$\mathbb{R}^n$ についても考えてみよう．

*7 $\mathbb{R}^2$ の基底の取り方は，これに限らずたくさんある．例えば，$\binom{2}{1}, \binom{1}{2}$ や，$\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$ なども $\mathbb{R}^2$ の基底となる．

定義 1.5. ($\mathbb{R}^n$ の基底)
ベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ が,

- 任意の $\mathbb{R}^n$ の元 v を線形結合で表せる．すなわち，ある係数の組 $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ によって，次のように書ける．

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m.$$

- 線形独立である．

という性質を満たすとき,
ベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ は $\mathbb{R}^n$ の**基底 (basis)** であるという．

基底の定義より，結局は $\mathbb{R}^n$ のどんなベクトルも基底の線形結合で表すことが出来る．しかも，基底は定義より線形独立なのだから，その表し方は1通りだ．つまり，$\mathbb{R}^n$ のベクトルは，基底の線形結合と 1 対 1 に完全に対応する．

$$\underbrace{v \in \mathbb{R}^n}_{\text{任意のベクトル}} \leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i v_i}_{\text{基底の線形結合}}$$

これは，ある意味では基底のことさえ分かってしまえば，どんなベクトルのことでも分かってしまうということだ．つまり基底というのは，すべてのベクトルの性質を代表して表す，ベクトル代表のようなものなのである．これが，基底を考える重要な理由のひとつだ．

$\mathbb{R}^n$ の基底となるベクトルの組は，実はたくさんある．が，基底をなすベクトルの「個数」に関してはとても重要な次の性質が成り立つ．

定理 1.6. (基底をなすベクトルの個数)

$\mathbb{R}^n$ の任意の基底について，その基底をなすベクトルの個数は n.

定義 1.7. (次元)

$\mathbb{R}^n$ の基底をなすベクトルの個数を，$\mathbb{R}^n$ の**次元 (dimension)** と呼び，$\dim \mathbb{R}^n$ と表す．$\dim \mathbb{R}^n = n$ である．

すなわち，$\mathbb{R}^n$ の基底の取り方にはいろいろなパターンがあれど，その基底をなすベクトルの個数はいつでも一緒で，しかもそれは n に一致する．

また，今後よく使う定義をここでひとつしておこう．

定義 1.8. (張る空間)

ベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ に対して，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ の**線形結合の全体**を，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ が**張る空間 (spanned space)** と呼び，$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ と表す．すなわち，

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i v_i \;\middle|\; c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.6　行列

日常生活にあらわれる問題を数学的に解きたいときに，非常によく現れるのが**連立方程式**だ．簡単な連立方程式の解き方については中学校で教えても

らえるが，少しでも複雑な連立方程式を考えた途端に，解を求めることが一気に困難になってしまうことが多い．

が，やっぱり「難しい連立方程式を解きたい!!」という気持ちはやっぱりなかなか捨てきれないものだ．実際，複雑な連立方程式の解は，とても大切な意味を持つものであることが多い．そして，「複雑な連立方程式を，“システマティックに”解く[*8]ための道具」として考えられたのが，本章で扱う**行列 (matrix)** なのである．

連立方程式を解くために考えられた行列は，今となってはあらゆる数学的な理論を記述するために欠かすことのできないものとなった．行列を最初に学んだとき，いったい何が嬉しくてこんなものを考えるのか？という印象を持つ学生は少なくないようだが，まずここで，

> 行列はとにかく役に立つ!! 死ぬほど役に立つ!!
> だから，今はあまりピンとこなくても，
> まずは「行列とは何か」，「行列をどのように使うのか」，
> とりあえず，何が何でも理解しておくべき!!

ということを断言しておく．そのくらい，行列ってのは，とにかくひとことじゃ言えないくらい大事なもんなのだ．

1.7 基本的な定義

縦方向に m 個，横方向に n 個の数を並べたものを，$m \times n$ **行列 (matrix)** または，m **行** n **列の行列**という．具体的には，m 行 n 列の行列を以下のよ

[*8] 「誰でも決まった手順で解ける」という意味である．もしかしたら，連立方程式の形によっては，エレガントかつセンシティブな発想で人によってはさらっと解けてしまうこともあるかもしれない．だが，そういう天才限定な話には，ここでは興味がないのだ．今考えたいことは，「誰でも，決まった手順で，同じ解を得られる」ような「決まった方法」はあるか？ということである．これはすなわち，コンピュータでも連立方程式を解く方法はないか？ということにもつながっている．

うに表す．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n)$ を，この行列の (i, j) 成分と呼ぶ．

ふたつの $m \times n$ 行列 A, B に対して，すべての成分がそれぞれ等しいとき，A と B は**等しい**といい，$A = B$ と書く．

いま，例として行列 A を次のように置こう，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

このとき，行列 A の列は，ベクトルとみなすことができる．すなわち，

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

と置くことにより，

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．このように，行列の列をベクトルとみなすとき，それらを**列ベクトル**と呼ぶ．

特に，行数と列数が等しく n である行列を n 次**正方行列 (square matrix)** と呼び，その (i, i) 成分 $(i = 1, 2, \dots, n)$ を**対角成分 (diagonal component)** と呼ぶ．対角成分以外が全て 0 である正方行列を**対角行列 (diagonal matrix)** と呼び，対角成分がすべて 1 の対角行列を**単位行列 (elementary matrix)** と呼ぶ (図 1.9)．$n \times n$ の単位行列を n **次単位行列**と呼び，E_n と表す．

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$$

図 1.9　3 次の正方行列と，その対角成分（$\boxed{}$ で囲んだ成分）

特に何次の単位行列なのかを強調する必要がない場合には，単位行列を単に E と表すことも多い．

$m \times n$ 行列 A に対し，その行と列を入れ替えてできる $n \times m$ 行列を A の**転置行列 (transpose matrix)** と呼び，${}^tA$ と書く[*9]．具体的には，A の転置行列は次のような形になる．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.8　行列の演算

行列には，演算を定義することが出来る．これから，行列の 3 つの演算

- 和
- スカラー倍
- 積

を定義しよう．

[*9] A^t, A^{T} などと表す流儀もある．

1.8.1 行列の和

2つの $m \times n$ 行列 A, B を次のように置く．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

この2つの行列の和 $A + B$ を，「各成分同士の和」により定義しよう．すなわち，以下のように $A + B$ を定義する[*10]．

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

行列の和について，次のような性質が成り立つ．

命題 1.9. A, B, C を $m \times n$ 行列としたとき，次の性質が成り立つ．

1. $A + B = B + A$ **(交換法則 commutative law)**
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(結合法則 associative law)**
3. $A + O = O + A = A$ **(零元 zero)**

ただし，O は全成分が0であるような $m \times n$ 行列で，
$m \times n$ **零行列 (zero matrix)** と呼ぶ．

*10 ちなみに，同じ大きさの行列同士にしか和は定義されない．

1.8.2 行列のスカラー倍

$m \times n$ 行列 A と実数 c に対して，行列 A の c 倍を，「成分ごとの c 倍」により定義する．すなわち，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow cA \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

このように，行列に実数をかけることを，行列の**スカラー倍**と呼ぶ．

命題 1.10. A, B を $m \times n$ 行列, k, l を実数としたとき，次の性質が成り立つ．

1. $(k+l)A = kA + lA$ **(分配法則 distributive law)**
2. $k(A+B) = kA + kB$ **(分配法則 distributive law)**
3. $(kl)A = k(lA)$

1.8.3 行列の積

行列の積の定義は少し巧妙である．この定義にいったい何の意味があるのか？と初学者は戸惑ってしまうかもしれない．そして，その疑問に今一言で答えるのは少し難しい．が，結論だけを言っておくならば，この積の定義はとても重要な意味をいくつも持っている．

簡単のために，まずは 2×3 行列と 3×4 行列に限定して考える．A, B を

次のように置こう．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}.$$

さて，A の1行目と B の1列目に次のように印をつけてみよう．

$$\begin{pmatrix} \fbox{a_{11}} & \fbox{a_{12}} & \fbox{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \boxed{b_{31}} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

そして，$(1,1)$ 成分 $(AB)_{1,1}$ を次のように定義する．

$$(AB)_{1,1} \overset{\text{def}}{=} \fbox{a_{11}}\,\boxed{b_{11}} + \fbox{a_{12}}\,\boxed{b_{21}} + \fbox{a_{13}}\,\boxed{b_{31}}.$$

これと全く同様に，行列の A と B の積 AB の (i,j) 成分 $(AB)_{i,j}$ を

- A の第 i 行.
- B の第 j 列.

の対応する成分同士の積の和によって定義する．先の A, B について，$(AB)_{1,1}$ と全く同様に積 AB の (i,j) 成分 $(AB)_{i,j}$ を定義すると，

$$(AB)_{i,j} \overset{\text{def}}{=} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3, 4)$$

となる．この定義によって A と B の積を計算してみると，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k4} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k4} \end{pmatrix}.$$

このように，2×3 行列 A と 3×4 行列 B の積 AB は，2×4 行列となる．これと全く同様にして一般の行列の積も定義しよう．$l \times m$ 行列 A と $m \times n$

行列 B を次のように置く.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

A と B の積 AB の (i,j) 成分 $(AB)_{i,j}$ を次のように定義する,

$$(AB)_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, l,\ j = 1, 2, \dots, n).$$

AB は $l \times n$ 行列となる (図 1.10).

$$\left(\boxed{l} \times m\right)\left(m \times \boxed{n}\right) \ \to\ \left(\boxed{l} \times \boxed{n}\right)$$

図 1.10　最初と最後が積のサイズに（イメージです）.

実際に何度か適当な行列を 2 つ作ってみて，その積を計算する練習をしておくと，行列の積が少し身近な存在になるだろう[*11]. ちなみに $m \times n$ 行列 A と n 次元実数ベクトル v に対して，v を $n \times 1$ 行列であるとみなせば，それらの積 Av は m 次元実数ベクトルとなることが分かる. また，Av の成分の具体的な形も，行列の積の定義に当てはめればすぐに得られるはずだ.

さて, 行列の積には重要な性質がある. 例えば次の 2 つの行列を考えよう.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

この 2 つの行列の積を，二通りの順番で計算してみる.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1-1 \\ 1+1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[*11] 例えば，2×3 行列と 2×4 行列のように，$l \times m$ と $m \times n$ という形になっていない 2 つの行列の積を計算しようとすると，積の計算がうまく出来ないことにも気づくと思う. 行列の積は，行列の形によっては定義されないこともあるのだ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1+1 \\ -1-1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

このように，積の順番によって，その結果が変わってしまった．

私たちは，実数の積を知っている．たとえば，1×2 とか $\sqrt{2} \times 5$ などは実数の積である．そして実数の積は，順番によらずに1通りに定まった．

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx.$$

このように，実数の積がその順番によらずに定まることを，実数は積について**可換 (commutative)** であるという．実数だけではなく，複素数なども積について可換になる．ところが，行列の積を考えてみると，簡単な行列でも，順番によってその結果が変わってしまうことがあると分かった．

このように，行列は積について可換ではない[*12]．すなわち，ある行列 A, B に対して，積 AB, BA がともに定義されているとき，

$$AB \neq BA$$

となることがあるのだ．このことから，ある行列 A が与えられているとき，これに左から行列 B をかけるのか，右から行列 B をかけるのかを，きちんと区別をしなければいけないということが分かる．この事実は，これから行列を扱って行く上で避けては通ることは出来ないことなので，きっちり頭の中で納得しておいて欲しい．

[*12] このことを，積について**非可換**であるということも多い．

命題 1.11. 行列 A, B, C, 実数 k に対し，次の性質が成り立つ（ただし，行列の和，積はすべて定義されているものとする）.

1. $(AB)C = A(BC)$ **(結合法則 associative law)**
2. $(A+B)C = AC + BC, A(B+C) = AB + AC$
   (分配法則 distributive law)
3. $k(AB) = (kA)B$
4. $AE = EA = A$ **(単位元 unit element)**

ただし，E は単位行列である.

1.9 逆行列

以降，行列の和や積があらわれた時には，断りなく，その和や積は定義されているものとしよう.

定義 1.12. 正方行列 A に対し，ある正方行列 B が存在し，次を満たすとき，B を A の**逆行列** (**inverse matrix**) と呼ぶ.

$$AB = BA = E.$$

このとき，B を A^{-1} と書く.

そして, 行列 A に逆行列が存在するとき, A は**正則行列** (**regular matrix**) であるという[*13]. 逆行列について，次の性質が成り立つ.

[*13] 逆行列が存在しない正方行列もたくさんある．そのような行列は正則でないという意味

命題 1.13. 正則行列 A, B に対して，次が成り立つ．

1. 行列 A に対し，A^{-1} は一通りに定まる．
2. $(A^{-1})^{-1} = A$　(A^{-1} の逆行列は A)．
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$．

正則行列 A に対して逆行列 A^{-1} は，0 でない実数における逆数の役割を果たす．0 でない実数にその逆数をかけると 1 となるように，正則な行列 A に対して A^{-1} をかけると，単位行列 E になるのである．

で**非正則**であるということが多い．

1.10　章末問題

1. 図 1.11 の正六角形について，ベクトル a, b, u, v, w を図のように置くとき，u, v, w を a, b の線形結合で表わせ．

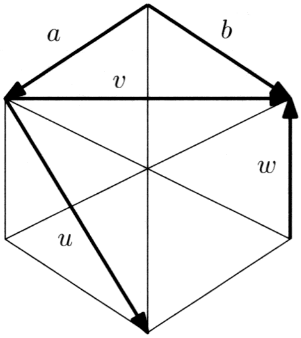


図 1.11　正六角形

2. 3 次元実数ベクトル v, w を次のように定義する．

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

このとき，次のベクトルを計算せよ．

(a) $v + w$

(b) $3v$

(c) $3v - 2w$

3. 3 次元実数ベクトル a, b, c を次のように定義する．

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(a) a, b, c は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(b) a, b, c の線形結合で $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を表わせ．

4. 線形独立な n 次元実数ベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ について，張る空間 $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ の次元は m であることを示せ．

5. 3 次実正方行列 A, B を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

次の行列を計算せよ．

(a) AB

(b) BA

(c) ${}^tA{}^tB$

(d) ${}^tB{}^tA$

6. 命題 1.13 を証明せよ．

7. 3 次実正方行列 A を次のように定義する[*14]．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(a) $A{}^tA, {}^tAA$ を計算せよ．

(b) 以上より，A^{-1} を求めよ．

[*14] ちなみにこの行列 A は，**直交行列 (orthogonal matrix)** という重要な行列の一例である．

第2章

連立一次方程式と基本変形

前章で，行列は連立方程式をシステマティックに解くために導入された道具であるということを述べた．今までにベクトル，行列の基本的な定義や性質をひととおり述べてきたが，これらを用いると，連立方程式を捉えるための「新たな視点」を手に入れることができる．

中学校の数学で，簡単な連立方程式を解くための方法として「加減法」と「代入法」を学んだことがあるだろう．これからこの章で行うのは，行列，ベクトルを用いて連立方程式を書き直し，「加減法」のパワーアップバージョンとも言える「掃き出し法」[*1]という方法で，「連立一次方程式」と呼ばれる連立方程式を解くことだ．そして，「掃き出し法」は，「行列の基本変形」という，行列に対する非常に重要な変形操作をベースに成り立っている．

なぜ急に連立方程式を ... とため息を漏らすことなかれ．連立方程式の背後にはベクトルと行列が潜んでいるし，ベクトルと行列の背後には，やはり連立方程式が見え隠れしている．この両者は，切っても切りはなせないほどに密接に関係しているのだ．まずは，中学校の数学の「加減法」からスタートし，「連立一次方程式」を解くための「掃き出し法」を得ることを目標にして，この章を始めてみよう．

[*1] **ガウスの消去法 (Gaussian elimination)** と呼ばれることもある．

2.1 はじまりは加減法

次の連立方程式を考えよう．

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 & (2.1) \\ 3x_1 + 4x_2 = 2 & (2.2) \end{cases}$$

．この連立方程式は，中学校で学習する**加減法**を用いて解くことができる．

まず，x_1 の係数をそろえるために，(2.1) の両辺を 3 倍しよう．

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 3 & (2.3) \\ 3x_1 + 4x_2 = 2 & (2.4) \end{cases}$$

あとは，x_1 を消去するために，(2.4) から (2.3) を辺々引くと，

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 3 & (2.5) \\ -5x_2 = -1 & (2.6) \end{cases}$$

という形に変形できて，(2.6) より，$x_2 = \frac{1}{5}$ という解が得られる．あとは，これを (2.1) に代入すると，

$$x_1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

という解を得て，晴れてこの連立方程式が解けました，めでたしめでたし，という結末である．読者にはおそらく，この方法で連立方程式を解く練習をした記憶が残っているのではないだろうか．

実はこの「加減法」には，非常に大切なエッセンスが山ほど詰まっている．まず，先ほどの手順をもう一度よく見返してみよう．先ほど行ったのは，

1. (2.1) の両辺を3倍．
2. (2.4) から (2.3) を辺々引く．

という操作だった．そしてこの操作の末に簡単な形になった連立方程式から，もとの連立方程式の解を導いたのだった．

さて，この「加減法」では暗黙のうちに，

1. ある式の両辺を (0 でない) 定数倍しても，解は変わらない．
2. ある式からある式を引いても，解は変わらない．

という事実を使っていることに気づいてもらえるだろうか．与えられた連立方程式を「解が変わらない変形」の繰り返しで簡単な形に帰着することで，我々は正しい解を得ることができていたのだ．

2.2 行列とベクトルの世界へ

先ほどの連立方程式は，実は行列とベクトルを使って次のように表すことが出来る．

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

なぜこのように表せるのか？ 実際に左辺を行列の積の定義にしたがって計算してみるとその理由が分かる．

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+3x_2\\ 3x_1+4x_2\end{pmatrix}.$$

このように，ベクトルの第一成分と第二成分が，式 (2.1), (2.2) にきちんと対応して，連立方程式をしっかり表せているのだ．さて，連立方程式をこの形であらわした上で，先ほどの手順をもう一度実行してみよう．

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\ \to\ \begin{pmatrix}3 & 9\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\ \to\ \begin{pmatrix}3 & 9\\ 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$$

あとは，最後の結果を通常の連立方程式の形に戻して，

$$\begin{cases}3x_1+9x_2=3\\ \qquad -5x_2=-1\end{cases}.$$

ここから先ほどと全く同じ手順で解を得れば良い．

「なんだ，同じことを繰り返しただけじゃないか」と思わないで欲しいのだ．上の変形で $\binom{x_1}{x_2}$ が全く動いていないことが大切なポイントなのである．つまり，$\binom{x_1}{x_2}$ の部分は，連立方程式を解く上で，特に書く必要がない．

つまり，連立方程式を解く上で本質的なのは，結局は左辺の係数と，右辺の定数項だけなのだ．だから，結局，次のような行列を作り，そこに先ほどの変形を施して行けば十分であることが分かる．

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

このように，連立方程式の左辺の係数を左側，右辺の定数項を右側に，縦線を隔てて並べてできる行列を，与えられた連立方程式の**拡大係数行列** **(augmented matrix)** という．結局，加減法で連立方程式を解くことは，拡大係数行列を次のように変形し，もとの形に戻して解を得ることと同じだ．

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right)..$$

2.3　行基本変形

さて，連立方程式の解を変えない2つの変形

【変形1】ある行を（0でない）定数倍する．
【変形2】ある行をある行に加える．

を見てきたが，このような「解を変えない」変形がまだ他にないか，考えてみよう．まず，この2つ以外にすぐに思いつく操作として，

【変形3】ある行とある行の交換．

が考えられる．この操作によって連立方程式の解が変わらないのは明らかだ．なぜなら，連立方程式の式の順番を入れ替えたところで，連立方程式の内容は全く変わらないからである．さらに，先に挙げた【変形1】と【変形2】の合成として，

【変形4】ある行の（0でない）定数倍をある行に加える．

という操作を得ることが出来る．この操作は，【変形 1】と【変形 2】を連続して施すことに過ぎないので，連立方程式の解をやはり変えない．さらに，【変形 2】は，「ある行の 1 倍をある行に加える」ことと同じなので，実は【変形 4】の特別な場合だと分かる．だから，わざわざ残しておく必要はない．つまり，今までに考えてきた変形は，以下の 3 つに集約されたことになる．

1. ある行とある行を交換する．
2. ある行を (0 でない) 定数倍する．
3. ある行の (0 でない) 定数倍を，ある行に加える．

この 3 つの変形は，本章の第一目標である「掃き出し法」のベースとなる非常に重要な変形であり，**行基本変形**と呼ばれる．

定義 2.1. (行基本変形)
行列に対する以下の変形をまとめて，**行基本変形**と呼ぶ．

1. ある行とある行を交換する．
2. ある行を (0 でない) 定数倍する．
3. ある行の (0 でない) 定数倍を，ある行に加える．

今まで見てきたとおり，連立方程式から拡大係数行列を作って行基本変形を施しても，やはりもとと同じ解を持つ連立方程式が得られる．この節では中学校で学ぶ簡単な連立方程式について考えてきたが，もっと一般的な形の連立方程式についても考えてみよう．

2.4 連立一次方程式

n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ による m 本の式から成る，次の形の連立方程式を，**連立一次方程式**という ($a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

連立一次方程式は，行列とベクトルを用いて次のように表すことができる．これを，連立一次方程式の**行列表示**という．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

さらに，a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$) から成る左辺の行列を A, x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) から成る左辺のベクトルを x, b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) から成る右辺のベクトルを b と置くと，連立方程式は次のように表せる．

$$Ax = b.$$

A をこの連立方程式の**係数行列**, x を**解ベクトル**[*2]と呼ぶ．前節でずっと扱っていたのは，$m = n = 2$ の連立一次方程式である．これから，前節と同じような手順で，連立一次方程式の解ベクトル（解）を求めてみよう．

[*2] **変数ベクトル**と呼ぶこともある．

2.5 行基本変形で連立一次方程式を解いてみる

まず，前節と全く同じ理由から，前節の連立一次方程式から拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

を作り，行基本変形

1. ある行とある行を交換する．
2. ある行を (0 でない) 定数倍する．
3. ある行の (0 でない) 定数倍を，ある行に加える．

を施しても，連立一次方程式の解は変わらない．よって，やはり行基本変形で拡大係数行列を簡単な形に帰着し，元の形に戻して解を得ることにより，欲しかった連立方程式の解を求められるのだ．実際に，$m = n = 3$ の連立一次方程式を解いてみよう．

例 2.2. 次の連立一次方程式を解いてみよう．

$$\begin{cases} x + 3y - z & = -4 \\ x + 4y - 2z & = -8 \\ -3x - 7y + 2z & = 9 \end{cases}.$$

まず，拡大係数行列を作る．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 & -8 \\ -3 & -7 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

連立方程式を行基本変形で解くときは，0 の階段を作るという目標を常に頭に浮かべておくと，簡単な形に帰着できる．実際にやってみよう．まず，左上の 1 を使って，(2, 1) 成分と (3, 1) 成分に 0 を作るために，

- 2 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足す.
- 3 行目に 1 行目 $\times 3$ を足す.

という行基本変形を実行する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ \boxed{1} & 4 & -2 & -8 \\ \boxed{-3} & -7 & 2 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

次に，$(2,2)$ 成分の 1 を使って, その下の $(3,2)$ 成分に 0 を作るために,

- 3 行目に 2 行目 $\times(-2)$ を足す.

という行基本変形を実行する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

さて，拡大係数行列の左下に「0 の階段」を作ることが出来たことにお気づきだろうか (図 2.1). このように，行基本変形により，行列に「0 の階段」を作る一連の操作を，**前進消去 (forward elimination)** と呼ぶ.

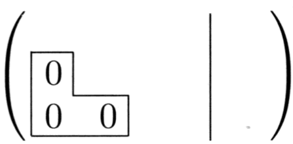


図 2.1　0 の階段

「0 の階段」さえ作ることが出来てしまえば，解を求めるのは簡単である. まず，変形後の拡大係数行列を，通常の連立方程式に戻そう.

$$\begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ y - z = -4 \\ z = 5 \end{cases}$$

すると，3 番目の式からすぐに $z = 5$ が得られる．次に，$z = 5$ を 2 番目の式に代入すると，

$$y - 5 = -4 \quad \therefore \ y = 1.$$

と，$y = 1$ が得られる．さらに，これらを 1 行目に代入すると，

$$x + 3 \times 1 - 5 = -4 \quad \therefore x = -2.$$

こんな風に，後ろの式から順番に，解がひとつずつ決まって行くのだ．この手順を**後退代入 (backward substitution)** という．

このように，連立一次方程式は，

1. 拡大係数行列を作る．
2. 前進消去を行う (0 の階段)．
3. 通常の連立方程式に戻し，後退代入を行う．

という決まった手順で，いつでも解を求めることが出来そうである．この手続きはすなわち，冒頭で述べた，システマティックに連立方程式を解く方法に他ならないじゃないか．この調子で，もう一つ連立方程式を解いてみよう．

例 2.3. 次の連立一次方程式を解いてみよう．

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 0 \\ x - y - 2z & = 0 \\ 2x + y - z & = 0 \end{cases}.$$

まず，この連立一次方程式の拡大係数行列を作ってみると，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

となる．この拡大係数行列に対して，前進消去を行おう．最初に，左上の 1 を使って，$(2,1)$ 成分と $(3,1)$ 成分に 0 を作るために，

- 2 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足す．

- 3 行目に 1 行目 $\times(-2)$ を足す．

という行基本変形を実行する．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -2 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

さらに，(3,2) 成分に 0 を作るために，

- 2 行目と 3 行目を $-1/3$ 倍する．
- 3 行目に 2 行目の (-1) 倍を加える．

という行基本変形を実行すると，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

これで前進消去が終了したわけだが，偶然，3 行目がすべて 0 になってしまった．これを通常の連立方程式の形に戻すと，

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

となり，式の数が 2 本になってしまった．

この連立方程式を満たす x, y, z は一組には決まらない．なぜなら，例えば z を任意の実数 t とすると，2 本目の式より，

$$y = -t.$$

さらに，1 本目の式より，

$$x = 4t$$

となり，連立方程式を満たす組

$$x = 4t, y = -t, z = t \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が得られるからである．このように，連立方程式の解が無数に存在する場合でも，やはり同じ方法でうまく解を求められる．

このように，連立一次方程式を

1. 拡大係数行列を作る．
2. 前進消去を行う．
3. 通常の連立方程式の形に戻し，後退代入を行う．

という一連の流れで解く方法は，**掃き出し法** (または**ガウスの消去法**) と呼ばれる，連立一次方程式の「システマティックな」解法[*3]である．

連立一次方程式については，本当はもっともっと深い理論や線形代数とのつながりがあり，到底本章だけですべてを解説できてはいない．が，あくまで本書の主題は線形空間である．連立一次方程式を実際に掃き出し法を使って解くことは，線形空間を学ぶ上で必要不可欠[*4]であるが，掃き出し法により連立一次方程式を解く方法さえ身につけておけば，とりあえず，線形空間の基礎的な事項の理解や，線形空間の計算には事足りる．

よって，連立一次方程式に関するもっと詳しい理論の説明については他の文献に譲ることにして，本書の内容は先へと進んで行くことにしよう．次章では，いよいよ本書で今までずっと高々と掲げてきた**線形空間**の理論に足を踏み入れる．最初に「まえがき」でも述べたが，線形空間とは，今までに学んできたベクトル，行列の基本的な理論をもとにして考えられるある空間 (集合) のことである．しかし，その適用範囲はきわめて広く，同時に，多岐にわたる高度な数学の入り口にもなっている．

著者は最初に線形空間を理解したとき，今までに学んでいた基礎的な内容をまるで空から鳥の目で眺めているような感覚に陥った．読者には是非，この感覚を味わって，線形空間の面白さに気づいてみてほしい．

[*3] 有限回の操作で問題を解く手順のことを**アルゴリズム (algorithm)** と呼ぶ．掃き出し法は，連立一次方程式の解を求めるための，非常に有名なアルゴリズムである．

[*4] たとえば，後ほど登場する**線形写像** f の**核** $\mathrm{Ker}\, f$ は非常に重要な線形空間のひとつだが，$\mathrm{Ker}\, f$ は，ある連立一次方程式の解全体がなす線形空間になっている．

2.6　章末問題

1. 次の連立一次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

2. 次の連立一次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

3. 次の連立一次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

4. 次の連立一次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = -7 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

5. 次のベクトルの組 u, v, w が線形独立か線形従属かを判定せよ.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

6. 次のベクトルの組 u, v, w が線形独立か線形従属かを判定せよ.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. 3 次元実数ベクトル a, b, c, v を次のように定義する．

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

このとき，v を a, b, c の線形結合で表わせ．

8. n 次実正則行列 A の逆行列 A^{-1} は次のように求めることが出来る．

(i) 左側に A, 右側に n 次単位行列 E_n を置いて縦線で区切った行列 $(A \mid E_n)$ を作る．
(ii) $(A \mid E_n)$ に行基本変形を行うことにより，$(E_n \mid B)$ の形に変形する (左側を単位行列にする)．
(iii) $B = A^{-1}$ である．

簡単のため $n = 3$ の場合について，この手続きが正しいことを簡潔に説明せよ．ただし，次の定理は認めて使って良い，

$AB = E_n$ ならば $BA = E_n$ であり，$B = A^{-1}$.

また，この手続を用いて次の行列 A の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. 前問の手続きを用いて，2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列の公式

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

を証明せよ．ただし，$a \neq 0, ad - bc \neq 0$ を仮定する[5]．

[5] 実は $ad - bc \neq 0$ という条件は，2 次正方行列 A が正則であることと同値になる．詳しくは「行列式」について調べてみるべし．

第 3 章

$\mathbb{R}$-線形空間

いよいよ，本書でずっと目標として掲げてきた**線形空間**の理論が始まる．我々は今まで，n 次元実数ベクトルの全体がなす集合 $\mathbb{R}^n$ を扱ってきた．$\mathbb{R}^n$ は様々な重要な性質を持つが，本章ではまずそれらの性質を明らかにし，その性質をベースにして，一般的な「線形空間」を導入する．

線形空間というものをひとたび考えると，今まではベクトルには見えなかった様々なものが突然ベクトルに見えてくる．ここが面白いところなのだ．この世界にはいったい，「実はベクトルだった」ものがどのくらい隠れているのだろう？この章では，そんなことも例を交えながら垣間みてみよう．今までいた場所を飛び立って，広い世界を見渡す旅，スタート!!

3.1 $\mathbb{R}^n$

我々はすでに，n 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を知っている．

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

これから，$\mathbb{R}^n$ の性質について詳しく調べてみよう．実は，$\mathbb{R}^n$ の様々な性

質は，今までずっと目標にしてきた線形空間の定義をするために欠かすことが出来ない重要なものである．

3.1.1 和について閉じている

さて，任意のベクトル $a, b \in \mathbb{R}^n$ を取ろう．

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と書くことにすると，

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

であり，各成分 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n$ はやはり実数[*1]なので，やはり $a + b$ も $\mathbb{R}^n$ の元であることが分かる．すなわち，

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n,\ a + b \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つ．このことを，$\mathbb{R}^n$ は**和について閉じている**という．

3.1.2 スカラー倍について閉じている

さらに，任意のベクトル $a \in \mathbb{R}^n$，任意の定数（スカラー）$c \in \mathbb{R}$ を取ると，

$$ca = c\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}$$

[*1] 実数同士の四則演算の結果は，やはり実数となる（ℝ は**体 (field)** である）．

であり，各成分 $ca_1, ca_2, \ldots, ca_n$ はやはり実数なので，ca もやはり $\mathbb{R}^n$ の元になる．すなわち，

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in \mathbb{R}^n.$$

このことを，$\mathbb{R}^n$ は**スカラー倍について閉じている**という．

3.1.3 8 つの代数的性質

和とスカラー倍について閉じていることにくわえて，$\mathbb{R}^n$ は以下のような性質を満たすことがすぐに確かめられる．

- 和についての性質
  - (i) ある $0 \in \mathbb{R}^n$ があって，任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して，
    $0 + a = a + 0 = a$ を満たす．（**ゼロベクトル**の存在）
  - (ii) $\forall a \in \mathbb{R}^n$,
    $a + (-a) = (-a) + a = 0$ を満たす $(-a) \in \mathbb{R}^n$（a の**和の逆元**）が存在する．
  - (iii) $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$,
    $a + b = b + a$.　(和について**可換**)
  - (iv) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n$,
    $(a + b) + c = a + (b + c)$.　(**結合法則**)
- スカラー倍についての性質
  - (v) $\forall a \in \mathbb{R}^n$,
    $1a = a$.（1 倍してもかわらない）
  - (vi) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n$,
    $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$.（**分配法則**）
  - (vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}^n$,
    $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.（**分配法則**）
  - (viii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n$,
    $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$.（まとめてスカラー倍できる）

この8つの性質を総じて，「8つの代数的性質」と呼ぶ．

3.2 「公理化」という考え方

$\mathbb{R}^n$ が

- 和について閉じている．
- スカラー倍について閉じている．
- 「8つの代数的性質」を満たす．

ということが分かった．

ところで，我々はいままで，「n 個の実数の組」のことを「ベクトル」と呼んでいた（$n = 2, 3$ の場合は，大きさと向きを持つ量，すなわち「矢印」のことであった）．そして，その「n 個の実数の組」としての「ベクトル」は，先ほど述べた性質を満たしていた．

今までの流れ

ベクトルは，先ほどの性質を満たす．
（「n 個の実数の組」としての「ベクトル」が，最初からある．）

3.2.1 $M(2;\mathbb{R})$

さて，ここで $M(2;\mathbb{R})$ を，2次の実正方行列全体がなす集合としよう．

$$M(2;\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

いま，$A, B \in M(2;\mathbb{R})$ とし，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

と置く．このとき，

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

の各成分 $a_{ij} + b_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ はやはり実数なので，$A + B \in M(2; \mathbb{R})$ となる．すなわち，$M(2; \mathbb{R})$ は和について閉じている．

さらに，$c \in \mathbb{R}$ としよう．このとき，

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix}$$

であり，各成分 ca_{ij} $(i, j = 1, 2)$ はやはり実数であるので．$cA \in M(2; \mathbb{R})$ となる．すなわち，$M(2; \mathbb{R})$ はスカラー倍について閉じている．

これらに加えて，$M(2; \mathbb{R})$ は前述の「8 つの代数的性質」を満たすこともすぐに示すことができる．以下にそれらの性質を述べよう．

- 和についての性質
  - (i) ある $O \in M(2; \mathbb{R})$ があって，任意の $A \in M(2; \mathbb{R})$ に対して，
    $O + A = A + O = A$ を満たす．(**零行列**の存在)
  - (ii) $\forall A \in M(2; \mathbb{R})$,
    $A + (-A) = (-A) + A = O$ を満たす $(-A) \in M(2; \mathbb{R})$
    （A の**和の逆元**）が存在する．
  - (iii) $\forall A, B \in M(2; \mathbb{R})$,
    $A + B = B + A$.　(和について**可換**)
  - (iv) $\forall A, B, C \in M(2; \mathbb{R})$,
    $(A + B) + C = A + (B + C)$.　(**結合法則**)
- スカラー倍についての性質
  - (v) $\forall A \in M(2; \mathbb{R})$,
    $1A = A$. (1 倍してもかわらない)
  - (vi) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in M(2; \mathbb{R})$,
    $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$. (**分配法則**)
  - (vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in M(2; \mathbb{R})$,

$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B.$ (**分配法則**)

(viii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in M(2;\mathbb{R}),$

$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$ (まとめてスカラー倍できる)

これらを見ると，$M(2;\mathbb{R})$ はやたらと $\mathbb{R}^n$ と似ている ... というか，ほとんどそのままの性質を満たすことが分かる．それもそのはず，そもそも 2 次の実正方行列は「4 つの実数を並べている」という意味では 4 次元実数ベクトルと同じだと言えるし，和とスカラー倍も，「成分ごとの和，スカラー倍」という意味ではどちらも同じである (さらに，これと全く同じことが，$M(n;\mathbb{R})$ の元についても言うことができる).

$M(2;\mathbb{R})$ がこんなにもベクトルらしき性質を満たしているにも関わらず，あくまで $M(2;\mathbb{R})$ の元は「行列」，$\mathbb{R}^4$ の元は「ベクトル」として区別すべきなのだろうか？ 両者は姿形は違えど，ある意味で本質は同じだと見なせるのではないだろうか？

3.2.2 ℝ-線形空間の定義

ここで我々は，とても重要な「発想の逆転」にたどり着くことになる．

発想の逆転

n 個の実数の組としての「ベクトル」が先にあって，その集合が

1. 和とスカラー倍について閉じている．
2. 8 つの代数的性質を満たす．

という性質を持つ ... のではなく，

1. 和とスカラー倍について閉じている．
2. 8 つの代数的性質を満たす．

という性質を持つ集合の元のことを，

すべて「ベクトル」と呼ぶことにしよう!!

$M(2;\mathbb{R})$ が

- 和とスカラー倍について閉じている.
- 8 つの代数的性質を満たす.

ということは述べた. 我々が「発想の逆転」をした後であれば, 2 次正方行列は「n 個の実数の組」という意味での「ベクトル」ではないにせよ, 和とスカラー倍について閉じていて, 8 つの代数的性質を満たすのだから, ベクトルと見なすことが出来る. 我々はこうして, **線形空間**にたどり着く.

定義 3.1. ($\mathbb{R}$-線形空間)
集合 V が次の性質を満たすとき, V は $\mathbb{R}$-**線形空間** ($\mathbb{R}$-**linear space**), または $\mathbb{R}$-**ベクトル空間** ($\mathbb{R}$-**vector space**) であるという. また, V の任意の元を V の**ベクトル** (**vector**) と呼ぶ.

1. V は**和について閉じている**.
   - V に和 $(+)$ が定義されていて, 次を満たす.

$$\forall v, w \in V,\ v + w \in V.$$

2. V は**スカラー倍について閉じている**.
   - V にスカラー (実数) 倍が定義されていて, 次を満たす.

$$\forall v \in V, \forall c \in \mathbb{R},\ cv \in V.$$

3. V は **8 つの代数的性質**を満たす.

- 和についての性質
  - (i) ある $0_V \in V$ が存在して，任意の $v \in V$ に対して
    $0_V + v = v + 0_V = v$ を満たす.
    (**ゼロベクトル**の存在)
  - (ii) $\forall v \in V$,
    $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$ を満たす $(-v) \in V$
    (v の**和の逆元**) が存在する.
  - (iii) $\forall v, w \in V$,
    $v + w = w + v$.　(和について**可換**)
  - (iv) $\forall u, v, w \in V$,
    $(u + v) + w = u + (v + w)$.　(**結合法則**)

- スカラー倍についての性質
  - (v) $\forall v \in V$,
    $1v = v$. (1 倍してもかわらない)
  - (vi) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$,
    $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$. (**分配法則**)
  - (vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$,
    $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$. (**分配法則**)
  - (viii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$,
    $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.　(まとめてスカラー倍できる)

このように，ある ℝ-線形空間 V について，今後はそのゼロベクトルを 0_V と表すことにする.

3.2.3　$\mathbb{R}$-線形空間は $\mathbb{R}^n$ の公理化

さて，$\mathbb{R}$-線形空間は，結局のところ，

1. n 個の実数の組の全体として，$\mathbb{R}^n$ を考える．
2. $\mathbb{R}^n$ が満たす「本質的に大切そうな性質」を抽出する．
3. それを新たな「定義」として，$\mathbb{R}$-線形空間という新たな対象を考える．

という流れで得られるものだ．そしてその結果，我々はもっと「本質的に $\mathbb{R}^n$ と同じに見える」さまざまなものを，統一的に見られるようになった．

このように，何かの本質的な性質だけを抽出して新しい定義とすることを，数学では**公理化 (axiomatization)** という．$\mathbb{R}$-線形空間は，$\mathbb{R}^n$ の「本質的に大切そうな性質」だけを定義とした数学的対象なのだから，$\mathbb{R}^n$ と「本質的に同じ」であるような集合と考えることが出来る．
これを，$\mathbb{R}$-線形空間は $\mathbb{R}^n$ の公理化であると言ったりする．

3.3　線形空間の例

$\mathbb{R}$-線形空間を考えて嬉しいことのひとつに，今まではベクトルに見えなかった様々なものがベクトルに見えてくる，ということがある．今から，その例をいくつか見て行こう．

例 3.2. (n 次実正方行列はベクトル)

$n \in \mathbb{N}$ とし，$M(n;\mathbb{R})$ を，n 次の実正方行列の全体がなす集合としよう．前節で見た $M(2;\mathbb{R})$ の場合と全く同様にして，$M(n;\mathbb{R})$ は

- 和とスカラー倍について閉じている．
- 8 つの代数的性質を満たす．

という性質を満たすことがすぐに確かめられる．すなわち，$M(n;\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$-線形空間であり，n 次実正方行列は $M(n;\mathbb{R})$ のベクトルである．

これに関しては，$M(2;\mathbb{R})$ の場合にも同じようなことに触れたので，今更びっくりも多分しないであろう[*2].

例 3.3. (複素数はベクトル)

複素数全体がなす集合を $\mathbb{C}$ と書くのだった.

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

ただし，i は虚数単位 ($i^2 = -1$) である．複素数の和と実数倍を，

$$(a + bi) + (c + di) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c) + (b + d)i.$$
$$\alpha(a + bi) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a) + (\alpha b)i.$$

と定義する．このとき，$\mathbb{C}$ は

- 和とスカラー倍について閉じている.
- 8 つの代数的性質を満たす.

という性質を満たすことがすぐに確かめられる．よって，$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$-線形空間であり，複素数は $\mathbb{C}$ のベクトルである.

例 3.4. (実数列はベクトル)

実数が列になったものを，実数列という．$a_0, a_1, a_2, \ldots$ という実数列を，

$$(a_n)_{n=0}^{\infty}$$

と表すことにしよう．そして，実数列全体がなす集合を $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ とおき，任意の $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ とし，実数列の和と実数倍を次のように定義する.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}.$$
$$\alpha(a_n)_{n=0}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a_n)_{n=0}^{\infty} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

[*2] ちなみに，行列の積についてはここでは全く考えていない．$\mathbb{R}$-線形空間について考えるとき，一般にベクトル同士の積には触れる必要がない.

この和と実数倍に対して，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$-線形空間となる．すなわち，実数列は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ のベクトルである．

例 3.5. (多項式はベクトル)

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ によって $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ と表されるものを，実係数の**多項式 (polynomial)** と呼ぶ．P_n を次のように定義しよう．

$$P_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \,\}.$$

そして，多項式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in P_n$ とし，実係数の多項式の和と実数倍を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\
&\qquad \stackrel{\text{def}}{=} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n. \\
&\alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) \\
&\qquad \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \cdots + (\alpha a_n)x^n \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

この和と実数倍について，P_n は $\mathbb{R}$-線形空間となる．

例 3.6. (関数はベクトル)[*3]

$\mathbb{R}$ のある部分集合 S の任意の元に対して，ある実数を対応させる規則のことを，S で定義された**実関数**と呼ぶ．例えば，

$$f(x) = 2x + 1, g(x) = 2^x, h(x) = \sin x$$

などは，$\mathbb{R}$ で定義された実関数である．今，$a, b \in \mathbb{R}$ に対して，
$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid a \le x \le b\}$ と置き[*4]，$[a, b]$ で定義された実関数の全体がなす集合を U と書こう．すなわち，

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f \mid f \text{ は } [a, b] \text{ で定義された実関数} \,\}$$

[*3] この $\mathbb{R}$-線形空間は，後述する**無限次元線形空間**の一例となっている．

[*4] **閉区間 (closed interval)** という．

とする．このとき，$[a,b]$ で定義された実関数の和と実数倍を次のように定義する (ただし，$x \in [a,b], c \in \mathbb{R}$ とする).

$$(f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)+g(x).$$
$$(cf)(x) \overset{\text{def}}{=} cf(x).$$

このとき, U はこの和と実数倍について ℝ-線形空間となる．すなわち，$[a,b]$ で定義された実関数は, U のベクトルである[*5].

と，このように，この世界には「実はベクトル」だったものがたくさん隠れていたことが分かる．行列も，数列も，関数も，「ℝ-線形空間の元」という意味では，どれも一緒なのだ．

3.4　ベクトルの線形独立，線形従属

ベクトルを線形空間の元として再定義したということは，今まで登場した，$\mathbb{R}^n$ のベクトルに関するさまざまな概念（定義）も，ℝ-線形空間の元としてのベクトルにも適用できるように書き換える必要がある．が，これらの定義は $\mathbb{R}^n$ の場合のものをほとんどそのまま真似してしまえば良いので，特に頭に入れるのに苦労することは無いはずだ．

V を ℝ-線形空間とする．$\underbrace{c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}}_{\text{係数}}, \underbrace{v_1, v_2, \ldots, v_m \in V}_{\text{ベクトル}}$ に対し，

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m$$

という形の式を，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ の**線形結合 (linear combination)** という．そして，次の関係式を**線形関係式 (linear relation)** と呼ぶ．

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m = 0.$$

[*5] この「関数をベクトルとみなす」という視点は非常に重要であり，特に，周期関数を三角関数の線形結合として表現する**フーリエ級数展開**などはその応用の最たる例である．また，もう一つ例をあげておくと，実定数係数の斉次線形微分方程式の解空間は ℝ-線形空間となり，その一般解は「基本解」と呼ばれるいくつかの解の線形結合で表される．

定義 3.7. (ベクトルの線形独立と線形従属)
$c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}, v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ に対して，線形関係式

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_m v_m = 0_V$$

を満たす係数の組 $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ について，

- $(c_1, c_2, \ldots, c_m) = (0, 0, \ldots, 0)$ に限るとき，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は**線形独立 (linearly independent)** であるという．
- $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ である組が存在するとき，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は**線形従属 (linearly dependent)** であるという．

ここまでで述べた定義は，すべて第 1 章で述べた定義の「$\mathbb{R}^n$」の部分を「V」と書き換えたものであることが分かるだろう．また，$V = \mathbb{R}^n$ と置いてこの定義を見れば，第 1 章での定義と一致することも分かる．すなわち，この定義は第 1 章の定義の拡張である．

例 3.8. (行列の線形独立)

さて，早速, $\mathbb{R}$-線形空間 $M(2; \mathbb{R})$ にこの定義をあてはめることにより，行列の線形独立について見てみることにしよう． いま，

$$E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置く．E_1, E_2, E_3, E_4 の線形関係式は，

$$c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4 = O \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$$

(ただし，O は 2 次の零行列) である．

このとき，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ が得られるならば E_1, E_2, E_3, E_4 は線形独立な行列の組で，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ の他に線形関係式を満たす

c_1, c_2, c_3, c_4 が存在するならば，E_1, E_2, E_3, E_4 は線形従属である．まず，左辺は次のように書ける．

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= c_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}c_1 & 0\\ 0 & c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & c_2\\ c_2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -c_3\\ c_3 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-c_4 & 0\\ 0 & c_4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}c_1 - c_4 & c_2 - c_3\\ c_2 + c_3 & c_1 + c_4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって結局，線形関係式は成分ごとに次のように書けることが分かる．

$$\begin{pmatrix}c_1 - c_4 & c_2 - c_3\\ c_2 + c_3 & c_1 + c_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

つまり，c_1, c_2, c_3, c_4 について，次のような連立一次方程式が得られる．

$$\begin{cases}c_1 - c_4 = 0\\ c_2 - c_3 = 0\\ c_2 + c_3 = 0\\ c_1 + c_4 = 0\end{cases}.$$

これを，行列表示すると，

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

となり，あとは掃き出し法を用いて[*6]これを解けば，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ を得る．よって，E_1, E_2, E_3, E_4 は線形独立である．

[*6] 本書では**行列式 (determinant)** について触れていないので脚注に留めるが，右辺がゼロベクトルであるような連立一次方程式 $Ax = 0$ は**等質連立一次方程式**と呼ばれ，係数行列の行列式 $\det A$ の値が 0 でないことを示せば，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ をただちに得ることが出来る．これは非常に重要な事項だが，本書の主題である線形空間は，とりあえずこれを経由せずとも渡り歩くことくらいは出来るので，本書ではあえて扱わないことにする．これについては，例えば [9]，[1]，[8] などを参照してほしい．

3.5　基底と張る空間

定義 3.9. (V の基底)
ベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ が，

- 任意の V の元 v を線形結合で表せる．すなわち，ある係数の組 $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ によって，次のように書ける．

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_m v_m.$$

- 線形独立である．

という性質を満たすとき，
ベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ は V の**基底 (basis)** であるという．

定理 3.10. (基底をなすベクトルの個数)
V の任意の基底について，基底をなすベクトルの個数は一定．

定義 3.11. (次元)
V の基底をなすベクトルの個数を，V の**次元 (dimension)** と呼び，$\dim V$ と表す．$\dim V$ が有限値を取るとき，V は**有限次元**であると言い，そうでないとき，V は**無限次元**であると言う[a]．

[a] 本書では，特にことわらない限り現れる線形空間はすべて有限次元であるとする．無限次元線形空間を扱う場合，逐一その旨を記載する．

ℝ-線形空間の基底の例を見てみよう.

例 3.12. ($M(2;\mathbb{R})$ の基底)

例 3.8 の E_1, E_2, E_3, E_4 を思い出そう.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_1, E_2, E_3, E_4 が $M(2;\mathbb{R})$ の基底であることを示すためには，次の 2 つの性質を満たすことを示せば良い.

1. $M(2;\mathbb{R})$ の任意の元 A を，E_1, E_2, E_3, E_4 の線形結合で表せる．すなわち，ある係数の組 $(c_1, c_2, \ldots, c_4)$ によって，次のように書ける.

$$A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4.$$

2. E_1, E_2, E_3, E_4 は線形独立である.

E_1, E_2, E_3, E_4 が線形独立であることは例 3.8 で示したので，
任意の $A \in M(2;\mathbb{R})$ が E_1, E_2, E_3, E_4 の線形結合で表せることを示せば良い.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として，

$$A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4$$

と置く．ここから，c_1, c_2, c_3, c_4 を決定しよう．両辺を成分ごとに整理し，連立方程式を作ると，

$$\begin{cases} c_1 - c_4 = a \\ c_2 - c_3 = b \\ c_2 + c_3 = c \\ c_1 + c_4 = d \end{cases}$$

を得る．これを解いて c_1, c_2, c_3, c_4 を求めると，

$$c_1 = \frac{a+d}{2}, c_2 = \frac{b+c}{2}, c_3 = \frac{c-b}{2}, c_4 = \frac{d-a}{2}$$

という解が得られるので，この通りに c_1, c_2, c_3, c_4 を取れば，

$$A = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4$$

と書ける．よって，E_1, E_2, E_3, E_4 は $M(2;\mathbb{R})$ の基底である．これより，$\dim M(2;\mathbb{R}) = 4$ であることも分かる．

定義 3.13. (張る空間)
ベクトルの組 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ に対して，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ の**線形結合の全体**を，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ が**張る空間 (spanned space)** と呼び，$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ と表す．すなわち，

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i v_i \;\middle|\; c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.6 部分空間

再び $\mathbb{R}^3$ に戻ってみよう．$\mathbb{R}^3$ は当然 $\mathbb{R}$-線形空間である．そして，$v \in \mathbb{R}^3$ は，原点から 3 次元空間の点を指す有向線分（矢印）とみなすことが出来るのだった (図 3.1).

さて，集合 W を次のように置こう．

$$W \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v_3 = 0 \right\}.$$

すなわち，$\mathbb{R}^3$ の元の中で，第 3 成分が 0 であるようなベクトル全体がなす集合を W と置いたわけだ．定義から明らかに $W \subset \mathbb{R}^3$ であり，W は図 3.2

の塗りつぶした部分である．

ここで，図 3.2 をよーく眺めてみてほしい．W は $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた $\mathbb{R}^2$ に見えてこないだろうか？ $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}$-線形空間なのだから，自然と期待したくなるのは，W は $\mathbb{R}^3$ の和とスカラー倍について，$\mathbb{R}$-線形空間になっているのではないだろうか？ということだ．実際に調べてみよう．

1. W が和について閉じていること．
   $v, w \in W$ とする．W の定義より，

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   と書ける．このとき，

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   ところで，W は第 3 成分が 0 であるような $\mathbb{R}^3$ のベクトル全体であったから，$v + w \in W$ が分かる．よって，W は和について閉じている．

2. W がスカラー倍について閉じていること．
   $v \in W, c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   と書けて，

$$cv = c\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   よって $cv \in W$ なので，W はスカラー倍について閉じている．

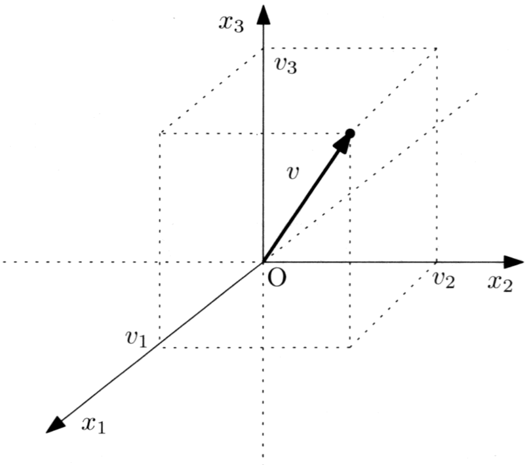


図 3.1 $\mathbb{R}^3$ のベクトルは有向線分とみなせる.

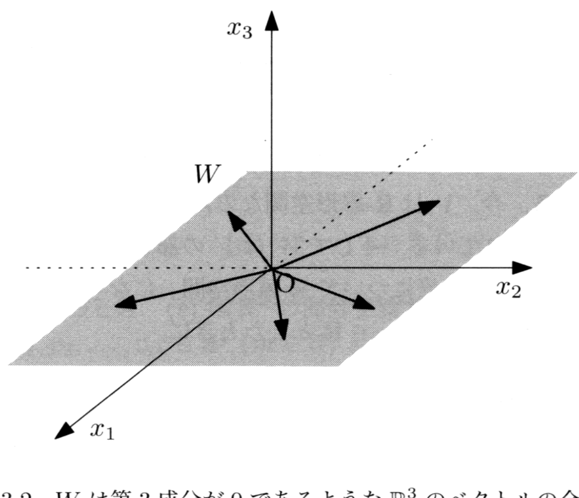


図 3.2 W は第 3 成分が 0 であるような $\mathbb{R}^3$ のベクトルの全体.

3. W が 8 つの代数的規則を満たすこと.

$W \subset \mathbb{R}^n$ であり，$\mathbb{R}^n$ は ℝ-線形空間であるから，$\mathbb{R}^3$ の 8 つの代数的規則を使えば，W も 8 つの代数的規則を満たすことが分かる.

よって，W は ℝ-線形空間であり，しかも $W \subset \mathbb{R}^3$ であることから，大きい ℝ-線形空間 $\mathbb{R}^3$ に含まれた，小さい ℝ-線形空間であることが分かる.

定義 3.14. (部分空間)

V は ℝ-線形空間であるとする. $W \subset V$ で，W が V の和とスカラー倍について ℝ-線形空間となるとき，
W は V の**部分空間 (subspace)** であるという (線形空間であることを特に強調して，**部分線形空間**と言うこともある)[a].

[a] V はそれ自身 V の部分集合であり，さらに，V は仮定より ℝ-線形空間であるから，V 自身は V の部分空間であるといえる.

先ほど考えていた W は，$\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

さて，ここでひとつ単純だが重要な考え方を述べておこう. W は V の部分空間であるとする. 今，V は ℝ-線形空間なのだから，V における和とスカラー倍は当然定義されている. そして W は V の部分空間であるから，定義より，「V の和とスカラー倍について ℝ-線形空間」になっている.

これはすなわち，$w_1, w_2 \in W, c \in \mathbb{R}$ としたときに，

$W \subset V$ なのだから，w_1, w_2 は V のベクトルとみなすことができる!!

という事実を使っている. w_1, w_2 を V のベクトルとみなせば，V には和と

スカラー倍が定義されていたのだから，それを使って

$$\underbrace{w_1 + w_2}_{\text{和}}, \underbrace{cw_1, cw_2}_{\text{スカラー倍}}$$

を「V の元として見た w_1, w_2 に対して」考えることができるのだ．そして，V は $\mathbb{R}$-線形空間だから和とスカラー倍について閉じているので，

$$w_1 + w_2, cw_1, cw_2 \in V$$

は必ず成り立つ．部分空間の定義は，特に

$$w_1 + w_2, cw_1, cw_2 \in W$$

が成り立って，しかも，W が 8 つの代数的規則まで満たしているとき，W は V の部分空間と呼ぼう!! ということを言っているのである．

一見当たり前のようなことを述べたが，実は

「部分集合の元を，もっと広い集合の元とみなす」

という考え方は，数学のあらゆる場面で登場するきわめて重要な視点なのである．必ずこの考え方に慣れておいてほしい．

例 3.15. (張る空間)

$v \in \mathbb{R}^3$ とし，v が張る空間

$$\langle v \rangle = \{\, cv \mid c \in \mathbb{R} \,\}$$

を考える．このとき，$\langle v \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となる（図 3.3)．

また，$v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^3$ $(m \in \mathbb{N})$ とすると，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ が張る空間

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = \{\, c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m \mid c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R} \,\}.$$

もやはり，$\mathbb{R}^3$ の部分空間となる (図 3.4).

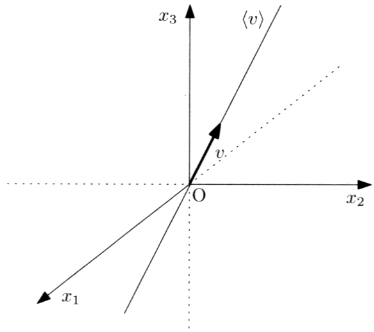


図 3.3 $\langle v \rangle$ は v のあらゆるスカラー倍が描く直線.

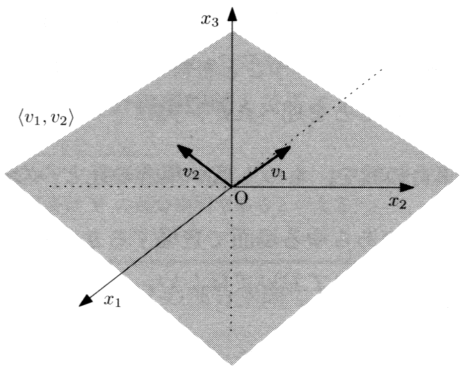


図 3.4 v_1, v_2 として線形独立なベクトルを取ると $\langle v_1, v_2 \rangle$ は v_1, v_2 を含む平面となる (じゃあ線形従属のときの $\langle v_1, v_2 \rangle$ の形は？).

例 3.16. (対角行列がなす部分空間)

$n \in \mathbb{N}$ とし，$M(n;\mathbb{R})$ を考える．いま，$M(n;\mathbb{R})$ の部分集合 $D(n;\mathbb{R})$ を次のように定義しよう.

$$D(n;\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ A \in M(n;\mathbb{R}) \mid A \text{ は対角行列} \}.$$

すなわち，次のような形をした行列だけをすべて集めてきて，$D(n;\mathbb{R})$ とお

くということだ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例えば，n 次単位行列 $E_n \in D(n;\mathbb{R})$ である．このとき，$A, B \in D(n;\mathbb{R})$ を次のように置こう．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

1. $D(n;\mathbb{R})$ は和について閉じている．

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり，$A + B$ もやはり対角行列なので，$A + B \in D(n;\mathbb{R})$.
よって，$D(n;\mathbb{R})$ は和について閉じている．

2. $D(n;\mathbb{R})$ はスカラー倍について閉じている.

$$cA = c\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ca_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & ca_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ca_{nn} \end{pmatrix}$$

であり，cA もやはり対角行列であるから，$cA \in D(n;\mathbb{R})$.
よって，$D(n;\mathbb{R})$ はスカラー倍について閉じている.

3. $D(n;\mathbb{R})$ は 8 つの代数的規則を満たす.
$D(n;\mathbb{R}) \subset M(n;\mathbb{R})$ である．$M(n;\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$-線形空間なので，8 つの代数的規則を満たす．$D(n;\mathbb{R})$ の元を $M(n;\mathbb{R})$ の元とみなせば，$D(n;\mathbb{R})$ も 8 つの代数的規則を満たすことがすぐに分かる.

例 3.17. (線形漸化式を満たす数列がなす部分空間)

$n \geq 2$ に対して次の漸化式を満たす実数列の全体の集合を V と置こう.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

すなわち，a_0, a_1 は最初から決まっていて，a_n $(n \geq 2)$ は，その直前の 2 項の和によって決まる．そんな数列の全体を考えてみるわけだ．たとえば，有名な**フィボナッチ数列**は，$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$ により決まる数列であるから，V の元である.

例 3.4 を思い出すと，実数列全体がなす $\mathbb{R}$-線形空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ には和とスカラー倍が定義してあった．その和とスカラー倍を V の元にも考えることにすると，V は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分空間となる．それを確かめてみよう.

1. V は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の和について閉じている.
$(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ とする．V の定義より，$n \geq 2$ に対して,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

が成り立つ．このとき，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の和の定義より，

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$$

であり，$n \geq 2$ に対して，

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \underbrace{(a_{n-1} + a_{n-2})}_{(a_n)_{n=0}^{\infty} \in V \text{ より}} + \underbrace{(b_{n-1} + b_{n-2})}_{(b_n)_{n=0}^{\infty} \in V \text{ より}} \\ &= (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_{n-2} + b_{n-2}) \end{aligned}$$

より，$(a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty} \in V$.
よって，V は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の和について閉じている．

2. <u>V は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ のスカラー倍について閉じている．</u>
$(a_n)_{n=0}^{\infty} \in V, c \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ のスカラー倍の定義より，

$$c(a_n)_{n=0}^{\infty} = (ca_n)_{n=0}^{\infty}.$$

$n \geq 2$ に対して，

$$ca_n = c\underbrace{(a_{n-1} + a_{n-2})}_{(a_n)_{n=0}^{\infty} \in V \text{ より}} = ca_{n-1} + ca_{n-2}.$$

よって，V は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ のスカラー倍について閉じている．

3. <u>V は 8 つの代数的性質を満たす．</u>
$V \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ で，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$-線形空間である．よって，V の元を $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の元とみなして $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の 8 つの代数的性質を使えば，V も 8 つの代数的性質を満たすことが分かる．

さて，さまざまな部分空間の例を挙げてきたが，W が $\mathbb{R}$-線形空間 V の部分空間であることを示すためには，

1. W は V の和について閉じている．

2. W は V のスカラー倍について閉じている，
3. W は 8 つの代数的性質を満たす．

という 3 つの性質を示さなければならず，和とスカラー倍については比較的すぐに示せるにしても，8 つの代数的性質については，示すのにかなり労力がかかってしまう（部分空間の例でも，8 つの代数的性質については証明を省いていた）．しかし，次に挙げる W が V の部分空間となる必要十分条件を用いれば，部分空間であることを簡単に示せるようになる．

命題 3.18. （部分空間の必要十分条件）
V を ℝ-線形空間とし，$W \subset V$ とする．W が V の部分空間であることは，次の 3 条件が満たされることと同値．

1. $W \neq \emptyset$. （W は空集合でない）
2. $\forall v, w \in W,\ v + w \in W$.
   （W は V の和について閉じている）
3. $\forall v \in W, \forall c \in \mathbb{R},\ cv \in W$.
   （W は V のスカラー倍について閉じている）

つまり，$W \subset V$ が部分空間であることは，W に何でも良いから 1 つ元が含まれていて，かつ，W が和とスカラー倍について閉じているということと同じだと，この命題は主張している．つまり，この命題によれば，8 つの代数的性質については，示さなくても大丈夫なのである（この命題の証明は章末問題に回してある．線形空間に慣れるための絶好の証明問題なので，是非チャレンジしてみてほしい）．

さて，ここでひとつ，重要な事実について述べておこう．まず，V を ℝ-線形空間とすると，ℝ-線形空間の定義より，V はゼロベクトル 0_V を含む．そして，W を V の部分空間であるとしたとき，W は V の和とスカラー倍に

ついて $\mathbb{R}$-線形空間なのだから，やはりゼロベクトル 0_W を含むはずである．

ここで気になることは，0_W と 0_V は等しいのか，それとも一般にそうではないのか，ということである．このことについて，次の事実が成り立つ (証明は章末問題に収録した)．

命題 3.19. (部分空間のゼロベクトル)
V は $\mathbb{R}$-線形空間，W は部分空間とする．また，V のゼロベクトルを 0_V, W のゼロベクトルを 0_W と表すと，

$$0_W = 0_V.$$

すなわち，$\mathbb{R}$-線形空間とその部分空間はゼロベクトルを共有する．

3.6.1 部分空間の基底の延長

V は n 次元 $\mathbb{R}$-線形空間，W はその部分空間 ($W \neq V$) とする．部分空間 W の基底にいくつかのベクトルを付け加えて，V の基底を構成できる[*7]．

命題 3.20. (部分空間の基底の延長)
W の任意の基底 $w_1, w_2, \ldots, w_m$ に対して，
$w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n$ が V の基底となるようなベクトルの組 $w_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n$ が存在する．

[*7] この操作を，部分空間の基底の延長という．

Proof. $w_1, w_2, \ldots, w_m$ は W の基底であるから，$W = \langle w_1, w_2, \ldots, w_m \rangle$. 仮定より $W \neq V$ なので，$w_{m+1} \in V$ かつ，$w_{m+1} \notin W$ を満たす w_{m+1} が存在する．そして，$w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1}$ は線形独立である．これを示すために，線形関係式 $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_m w_m + c_{m+1} w_{m+1} = 0$ を考えよう．このとき，$c_1 = c_2 = \cdots = c_{m+1} = 0$ を示せば良い．

- $c_{m+1} = 0$ である．
  なぜなら，$c_{m+1} \neq 0$ を仮定すると，線形関係式は
  $$w_{m+1} = -\frac{1}{c_{m+1}}(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_m w_m)$$
  と変形できる．ここから，$w_{m+1} \in \langle w_1, w_2, \ldots, w_m \rangle = W$ だが，これは w_{m+1} の取り方に矛盾する．よって，$c_{m+1} = 0$.
- $c_1 = c_2 = \cdots = c_{m+1} = 0$ である．
  なぜなら，先ほど示したように，$c_{m+1} = 0$ である．よって，線形関係式は結局
  $$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_m w_m = 0$$
  と書けて，さらに，$w_1, w_2, \ldots, w_m$ は W の基底だったので，線形独立である．よって，$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ である．

これより，$w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1}$ は線形独立なベクトルの組であることが分かった．さらに，$W \subset \langle w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1} \rangle \subset V$ であり，$w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1}$ は $\langle w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1} \rangle$ の基底である．

- $V = \langle w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1} \rangle$ なら，$w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1}$ が求めたかった W の基底の延長である．
- $V \neq \langle w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1} \rangle$ なら，$W' = \langle w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1} \rangle$ と置き直すと，W' は $w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1}$ を基底とする V の部分空間で，$W' \neq V$ である．この W' に対して，全く同じ操作を行う．

これを，V に一致する張る空間が得られるまで繰り返せば良い．　□

3.6.2 和空間

V を $\mathbb{R}$-線形空間とし，$W_1, W_2 \subset V$ はその部分空間とする．W_1, W_2 を使って，V の部分空間を新しく構成することができる．

定義 3.21. (和空間)
$W_1 + W_2 \subset V$ を次のように定義する．

$$W_1 + W_2 \overset{\text{def}}{=} \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}.$$

$W_1 + W_2$ を，W_1 と W_2 の**和空間 (sum space)** という．

和空間 $W_1 + W_2$ は和集合 $W_1 \cup W_2$ とは違うということに注意しよう．

命題 3.22. 和空間 $W_1 + W_2$ は V の部分空間である．

さて，このことを命題 3.18 の必要十分条件を用いて証明してみよう．

Proof. 命題 3.18 により，次の 3 つの条件を示せば良い．

1. $W_1 + W_2 \neq \varnothing$.
2. $\forall v, w \in W_1 + W_2,\ v + w \in W_1 + W_2$.
3. $\forall v \in W_1 + W_2, \forall c \in \mathbb{R},\ cv \in W_1 + W_2$.

1. W_1, W_2 は V の部分空間であるから，命題 3.19 より，$0_V \in W_1, 0_V \in W_2$．よって，$0_V + 0_V \in W_1 + W_2$ より，$W_1 + W_2 \neq \varnothing$.
2. $v, w \in W_1 + W_2$ としよう．このとき，$W_1 + W_2$ の定義より，ある

$v_1, w_1 \in W_1, v_2, w_2 \in W_2$ が存在して，

$$v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2$$

と表せる．このとき，

$$\begin{aligned} v + w &= (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= \underbrace{(v_1 + w_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(v_2 + w_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2. \end{aligned}$$

よって，$\forall v, w \in W_1 + W_2,\ v + w \in W_1 + W_2$.

3. $v \in W_1 + W_2, c \in \mathbb{R}$ としよう．このとき，ある $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$ が存在して，$v = v_1 + v_2 \quad (v_1 \in W_1, v_2 \in W_2)$ と表せる．

$$\begin{aligned} cv &= c(v_1 + v_2) \\ &= \underbrace{cv_1}_{\in W_1} + \underbrace{cv_2}_{\in W_2} \in W_1 + W_2. \end{aligned}$$

よって, $\forall v \in W_1 + W_2, \forall c \in \mathbb{R},\ cv \in W_1 + W_2$.

以上で，$W_1 + W_2$ が V の部分空間であることが示せた． □

例 3.23. (e_1, e_2, e_3 が張る空間の和空間)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と置き，$\mathbb{R}^3$ の 2 つの部分空間（張る空間）$\langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle$ を考えよう．張る空間は次のように定義されていた．

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle &= \{\, ae_1 + be_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}. \\ \langle e_2, e_3 \rangle &= \{\, ce_2 + de_3 \mid c, d \in \mathbb{R} \,\}. \end{aligned}$$

このとき，$\langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle$ は例 3.15 より，$\mathbb{R}^3$ の部分空間である．今，和空

間 $\langle e_1, e_2\rangle + \langle e_2, e_3\rangle$ について考えてみると，和空間の定義より，

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_2\rangle + \langle e_2, e_3\rangle &= \{\,(ae_1 + be_2) + (ce_2 + de_3) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\,\}\\ &= \{\,\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,\}\\ &= \langle e_1, e_2, e_3\rangle = \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

が得られる（最後の等号は，e_1, e_2, e_3 が $\mathbb{R}^3$ の基底であることから従う）．つまり，この場合，2 つの部分空間 $\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_2, e_3\rangle$ の和空間は $\mathbb{R}^3$ に一致する．ここから，$\dim(\langle e_1, e_2\rangle + \langle e_2, e_3\rangle) = 3$ である．ちなみに，$\langle e_1, e_2\rangle \cup \langle e_2, e_3\rangle$ はこの場合，$\langle e_1, e_2\rangle + \langle e_2, e_3\rangle$ と一致しない．これについては，$\langle e_1, e_2\rangle + \langle e_2, e_3\rangle = \mathbb{R}^3$ に対し，$\langle e_1, e_2\rangle \cup \langle e_2, e_3\rangle$ が図 3.5 のグラフに対応していることからも分かるだろう[*8]

3.6.3 共通部分

また，V の部分空間 W_1, W_2 の共通部分 $W_1 \cap W_2$ を考える[*9]と，これもやはり V の部分空間となる．

命題 3.24. $W_1 \cap W_2$ は，V の部分空間である．

[*8] ちなみに $\langle e_1, e_2\rangle \cup \langle e_2, e_3\rangle$ は和について閉じていないので，実は $\mathbb{R}$-線形空間にすらなっていない．直感的には，図 3.5 の 2 枚の平面 $\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_2, e_3\rangle$ からそれぞれ e_1, e_3 を取って，その和（2 つのベクトルが張る平行四辺形の対角線に対応するベクトル）を考えてみると，それがどちらの平面にも属さなくなってしまうことから分かる．また，数式を使えば以下のように確かめられる．

$$e_1 \in \langle e_1, e_2\rangle, e_3 \in \langle e_2, e_3\rangle, e_1 + e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \notin \langle e_1, e_2\rangle \cup \langle e_2, e_3\rangle.$$

（$\notin$ は，$\in$ の否定．すなわち，「属さない」という意味の記号．）

[*9] ここでいう共通部分は，1.1.2 で定義した，集合としての共通部分ということである．

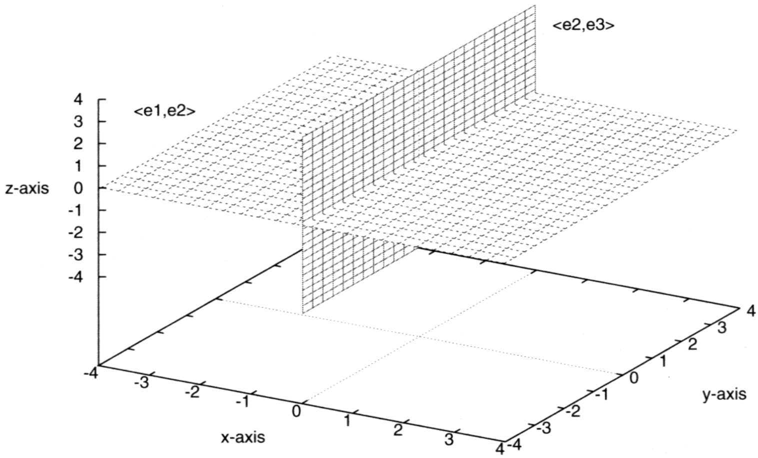


図 3.5　$\langle e_1, e_2\rangle \cup \langle e_2, e_3\rangle$ のグラフ.

Proof. 命題 3.18 により，以下の 3 つの条件を示せば良い.

1. $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$.
2. $\forall v, w \in W_1 \cap W_2,\ v + w \in W_1 \cap W_2$.
3. $\forall v \in W_1 \cap W_2, \forall c \in \mathbb{R},\ cv \in W_1 \cap W_2$.

1. W_1, W_2 は V の部分空間なので，$0_V \in W_1, W_2$.　$\therefore 0_V \in W_1 \cap W_2$ より，$W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$.
2. $v, w \in W_1 \cap W_2$ とする．このとき，$v, w \in W_1$ かつ $v, w \in W_2$. W_1, W_2 は V の部分空間なので，

$$v + w \in W_1 \cap W_2, v + w \in W_1 \cap W_2.$$

よって，$v+w \in W_1 \cap W_2$.

3. $v \in W_1 \cap W_2, c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$v \in W_1$ かつ $v \in W_2$. W_1, W_2 は V の部分空間なので，

$$cv \in W_1 \cap W_2.$$

よって，$cv \in W_1 \cap W_2$.

以上で，$W_1 \cap W_2$ が V の部分空間であることが示せた． □

例 3.25. $(\langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle)$

例 3.23 で，$\langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle$ の和空間について見たが，今度は共通部分についても考えてみよう．図 3.5 からも見て取れるとおり，$\langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_2 \rangle$ である．これより，$\dim(\langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle e_2, e_3 \rangle) = 1$ である．

3.6.4 和空間と共通部分の次元定理

例 3.23, 例 3.25 において，$\dim(\langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_3 \rangle) = 3$, $\dim(\langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle e_2, e_3 \rangle) = 1$ ということを述べておいた．さらに，e_1, e_2, e_3 が線形独立なベクトルなので，e_1 と e_2 も線形独立で，e_2 と e_3 も線形独立である[*10].

よって，$\dim \langle e_1, e_2 \rangle = \dim \langle e_2, e_3 \rangle = 2$ で，次の等式が成り立つ．

$$\underbrace{\dim(\langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_3 \rangle)}_{3} = \underbrace{\dim \langle e_1, e_2 \rangle}_{2} + \underbrace{\dim \langle e_2, e_3 \rangle}_{2} - \underbrace{\dim(\langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle e_2, e_3 \rangle)}_{1}.$$

[*10] 一般に，線形独立なベクトルの組からいくつかのベクトルを抜き出すと，それらも線形独立なベクトルの組となる (章末問題の第 3 問).

定理 3.26. (和空間と共通部分の次元定理)
V を $\mathbb{R}$-線形空間，W_1, W_2 を V の部分空間とする．このとき，

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Proof. $\dim W_1 = n, \dim W_2 = m, \dim(W_1 \cap W_2) = r$ と置こう．

$\dim(W_1 + W_2) = n + m - r$ を示す．$v_1, v_2, \ldots, v_r$ を $W_1 \cap W_2$ の基底とする．$W_1 \cap W_2 \subset W_1, W_2$ なので，命題 3.20 より，$v_1, v_2, \ldots, v_r$ にベクトルの組 $u_{r+1}, \ldots, u_n$ を付け加えて $v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$ が W_1 の基底となるようにできる．同様に，ベクトルの組 $w_{r+1}, \ldots, w_m$ を $v_1, v_2, \ldots, v_r$ に付け加えて，W_2 の基底 $v_1, v_2, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_m$ を構成できる．

$$\underbrace{v_1, v_2, \ldots, v_r}_{r\text{ 個}}, \underbrace{u_{r+1}, \ldots, u_n}_{(n-r)\text{ 個}}, \underbrace{w_{r+1}, \ldots, w_m}_{(m-r)\text{ 個}}$$

が $W_1 + W_2$ の基底となることを示せば，$\dim(W_1 + W_2) = r + (n-r) + (m-r) = n + m - r$ が示せたことになる．

まず，これらが線形独立だと示すために，線形関係式を立てよう．

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r + b_1u_{r+1} + b_2u_{r+2} + \cdots + b_{n-r}u_n$$
$$+c_1w_{r+1} + c_2w_{r+2} + c_{m-r}w_m = 0.$$

移項すると，

$$\underbrace{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r + b_1u_{r+1} + b_2u_{r+2} + \cdots + b_{n-r}u_n}_{\in W_1}$$
$$= \underbrace{-(c_1w_{r+1} + c_2w_{r+2} + c_{m-r}w_m)}_{\in W_2}.$$

両辺が $W_1 \cap W_2$ の元であることから，それぞれは $W_1 \cap W_2$ の基底 $v_1, v_2, \ldots, v_r$ の線形結合により表すことができて，最終的に次のように表すことができる．

$$b_1 u_{r+1} + b_2 u_{r+2} + \cdots + b_{n-r} u_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r.$$
$$c_1 w_{r+1} + c_2 w_{r+2} + c_{m-r} w_m = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_r v_r.$$

移項して，

$$-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_r v_r + b_1 u_{r+1} + b_2 u_{r+2} + \cdots + b_{n-r} u_n = 0.$$
$$-\beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \cdots - \beta_r v_r + c_1 w_{r+1} + c_2 w_{r+2} + \cdots + c_{m-r} w_m = 0.$$

$v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$ は W_1 の基底であり, $v_1, v_2, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n$ は W_2 の基底なので，それぞれ線形独立．よって，$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-r} = c_1 = c_2 = \cdots = c_{m-r} = 0$. さらにこれを最初の線形関係式に代入すると，

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r = 0.$$

$v_1, v_2, \ldots, v_r$ は $W_1 \cap W_2$ の基底なので線形独立であり，$a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. よって，$v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n, w_{r+1}, \ldots, w_m$ は線形独立である．また，任意の $v \in W_1 + W_2$ に対して，ある $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ が存在して，$v = w_1 + w_2$ と書ける．

$v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$ は W_1 の基底であり, $v_1, v_2, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n$ は W_2 の基底なので, w_1 は $v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$,
w_2 は $v_1, v_2, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n$ の線形結合で表せる．それを $v = w_1 + w_2$ に代入すれば，v が $v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n, w_{r+1}, \ldots, w_m$ の線形結合で表せることが分かる．よって，$v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n, w_{r+1}, \ldots, w_m$ は $W_1 + W_2$ の基底であり，

$$\dim(W_1 + W_2) = n + m - r.$$

よって，

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

□

3.7 章末問題

V は $\mathbb{R}$-線形空間であるとする．

1. 以下の性質が成り立つことを示せ．
   ただし，V のゼロベクトルを 0_V と書くことにする．
   (i) $\forall c \in \mathbb{R}, c0_V = 0_V$.
   (ii) $\forall v \in V, 0v = 0_V$.
   (iii) $c \in \mathbb{R}, v \in V$ に対し，
   $cv = 0_V \Rightarrow c = 0$ または $v = 0_V$.
   (iv) $\forall c \in \mathbb{R}, \forall v \in V$,
   $(-c)v = c(-v) = -(cv)$.

2. $x, y, z \in V$ が線形独立なベクトルの組ならば，$x+y, x-y, x-2y+z$ も線形独立なベクトルの組であることを示せ．

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ が線形独立なベクトルの組なら，その任意の一部分 $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k} \in V$ $(n_i = 1, 2, \ldots, n,\ k \leq n)$ も線形独立なベクトルの組であることを示せ．

4. 命題 3.18 を示せ．

5. W は V の部分空間であり，V, W のゼロベクトルをそれぞれ $0_V, 0_W$ と書くとき，次を示せ．
$$0_V = 0_W.$$

6. $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を次のように定める.

$$W \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 3y - z = 0, 3x + 2y + z = 0 \right\}.$$

(i) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ.

(ii) W の一組の基底と次元を求めよ.

7. $\mathbb{R}^3$ の部分集合 L を次のように定める.

$$L \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(i) L は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ.

(ii) L の一組の基底と次元を求めよ.

8. 問題 6, 問題 7 を参考にしながら考えてみてほしい.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y, z \text{ の連立 1 次方程式} \right\}$$

という形で定義される $\mathbb{R}^3$ の部分集合 S について, S を $\mathbb{R}^3$ の部分空間とするには, どのような連立方程式を条件とすれば良いだろうか?

第 4 章

線形写像

今まで見てきたのが線形空間の性質だとしたら，これから我々が見て行くのは線形空間と線形空間の関係である．そして，線形空間と線形空間の関係を明らかにするきわめて重要な鍵となるのが，**線形写像 (linear map)** だ．

例えば，次の 2 つの $\mathbb{R}$-線形空間 ($\mathbb{R}^3$ の部分空間) を考えよう．

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

この 2 つの $\mathbb{R}$-線形空間を $\mathbb{R}^3$ に図示したものが図 4.1 である．結局 V は xy-平面，W は yz-平面なので，集合としては両者はもちろん全く異なるのだが，どちらも結局，$\mathbb{R}^2$ と全く構造が同じ $\mathbb{R}$-線形空間じゃないか，という気持ちが直感的に生まれてくることは自然なことだろう．

この 2 つの線形空間は，本質的には明らかに $\mathbb{R}^2$ と同じ $\mathbb{R}$-線形空間になっていそうなのだが，「集合として異なるから ⋯」という理由で，この 2 つを常に区別すべきなのだろうか？ 線形空間としての構造のみに着目するのであれば，時にこれらを同一視することも必要なのではないだろうか？ この疑問は，わずか 1 行の数式によって解決される．

$$V \simeq W \simeq \mathbb{R}^2.$$

この数式の意味も含めて，この章で線形空間と線形空間をつなぐ「線形写像」とはいったい何なのか？ということを学んでみよう．

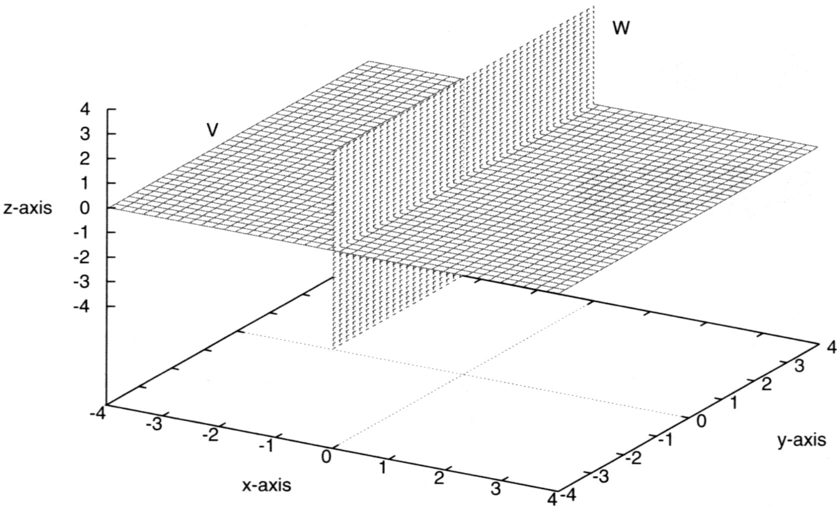


図 4.1　V と W.

4.1　写像

線形写像とは，**写像 (map)** という，数学においてきわめて重要な概念のうち，特に良い性質を満たすものである．線形写像について知るには，まず「写像」について知る必要がある．いま，X, Y は任意の集合としよう．

定義 4.1. (写像)

X の任意の元 x を Y のある元（ただひとつ[a]）に対応させる規則 f のことを，X から Y への**写像 (map)** と呼び，$f : X \to Y$ と表す．写像 $f : X \to Y$ により $x \in X$ に対応する Y の元を $f(x) \in Y$ と表す．

また，X を**始域 (domain)**, Y を**終域 (target)** と呼ぶ．

[a] x に対していくつもの値が対応するような規則も考えることはできるが，それは写像とは呼ばない．

写像 $f : X \to Y$ を直感的にイメージするために，図 4.2 のようなイメージ図をこれから多用する．慣れないうちは，こんな図を頭の中で常にイメージすると，写像をはやく理解する助けとなるかもしれない．

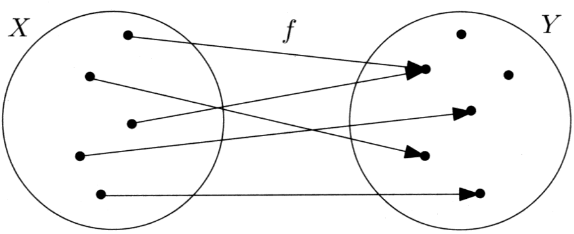


図 4.2　写像のイメージ図 (X の元を f が Y の元に対応させる)

写像の定義は少し抽象的であるので，実体がいまいち掴みにくいかもしれない．が，この抽象的な定義ゆえに，きわめて写像という概念の適用範囲が広いということも事実である．いくつか，写像の例を見てみよう．

例 4.2. (アルファベットの順番)

$X = \{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\ldots,\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}\}, Y = \{1,2,\ldots,26\}$ と置こう．今，任意の X の元（アルファベット）に対して，

「アルファベットとしての順番」

を対応させる，という規則を考えてみよう．例えば，$\mathcal{C}$ は3番目のアルファベットなので，この規則によって3という数に対応する．この規則を f と書くとき，f は X から Y への写像 $(f : X \to Y)$ である．たとえば，

$$f(\mathcal{C}) = 3, f(\mathcal{J}) = 10, f(\mathcal{Z}) = 26.$$

例 4.3. (関数は写像)

実関数は，実数を実数に対応させる規則のことである．たとえば，一次関数 $y = 2x + 1$ を考えてみると，これは，$x \in \mathbb{R}$ に $y = 2x + 1 \in \mathbb{R}$ を対応させる規則だと言える（図4.3)．つまり，我々が昔から知っている「実関数」とは，実は
$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像のことなのである．

例 4.4. (行列によるベクトルの変換)

$v \in \mathbb{R}^n, A \in M(n;\mathbb{R})$ としよう．このとき，写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$f(v) \stackrel{\text{def}}{=} Av.$$

すなわち，ベクトルに行列 A を左からかけるという規則を f と表しているわけだ．この f は，本章の主題である線形写像の最たる例となっている．

このように，今まで知らずに触れていたものを実は写像として捉えることができる，ということは意外と多い．読者の身の回りにいったいどのくらいの「写像」が隠れているのか，なんて考えてみるのも面白いかもしれない．

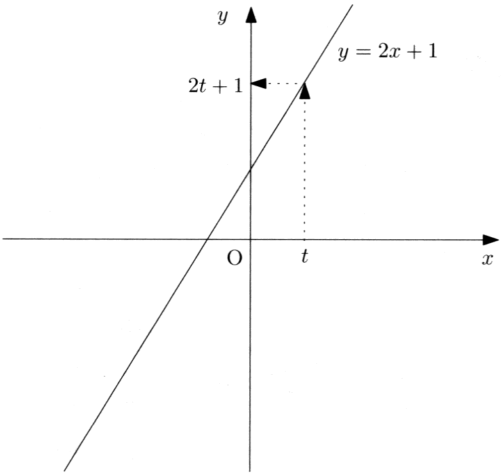


図 4.3　$y = 2x + 1$ のグラフ.

4.2　写像に関するいろいろな言葉

「写像なんていう単純なものを考えて何が嬉しいのだ？」と感じる読者もいるかもしれないが，実は，「現代の数学はすべて写像によって記述されるといっても過言ではない」というほど，写像というのはきわめて重要な概念である[*1]．我々もこれから「線形写像」という特別な写像について扱って行くわけだが，そのためには写像について数学的に扱うためのいろいろな言葉の準備が必要だ．本節ではそれを目標にしよう．

[*1] 著者の以前の指導教員は「我々数学者はさー，“こんにちは” って言うより，“写像” って言うほうが多いからねー」と言っていた．

4.2.1　像と逆像

写像 $f: X \to Y$, $A \subset X$ を考えよう．いま，A の元をすべて f によって Y の元に対応させる[*2]と，Y の部分集合が出来上がる (図 4.4)．この Y の部分集合を $f(A)$ と書くことにしよう[*3].

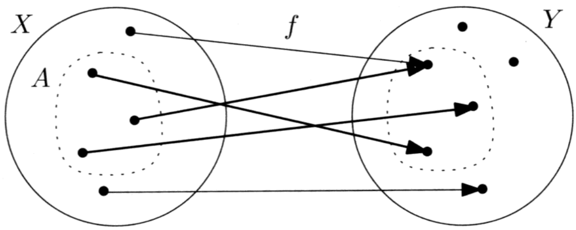


図 4.4　$A \subset X$ の元をすべて f で写してできる Y の部分集合.

定義 4.5. (像)
$A \subset X$ に対して,

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} \{\, f(a) \mid a \in A \,\} \subset Y.$$

$f(A)$ を A の f による**像 (image)** と呼ぶ.

今度は逆に, $B \subset Y$ を考えよう．いま, f で写すと B に入るような X の元の全体という，X の部分集合が定まる (図 4.5)．この部分集合を $f^{-1}(B)$ と

---

*2 「f によって Y の元に対応させる」というのを，簡単に「f によって写す」ということがとても多い．今後，本書でも「f によって写す」という言い回しを多用する．もちろんこれは一般的にもメジャーな言い回しであるので，読者も安心して使いまくってほしい.

*3 f で A の元をすべて写しているのだから，イメージ的には A をまるごと f で写したということになる．$f(A)$ という記法のココロはこれである.

書くことにしよう[*4].

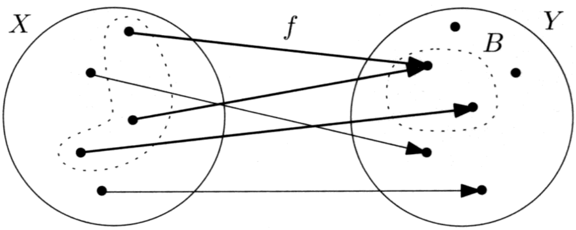


図 4.5　f で写すと B に入るような X の元の全体（部分集合）.

定義 4.6. (逆像)
$B \subset Y$ に対して,

$$f^{-1}(B) \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in X \mid f(a) \in B \,\} \subset X.$$

$f^{-1}(B)$ を B の f による**逆像 (inverse image)** と呼ぶ.

4.2.2　全射と単射

写像 $f : X \to Y$ に対して，X の像 $f(X)$ を考えよう．このとき，$\forall x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ となるので，一般には，$f(X) \subset Y$ となる (図 4.6).

$f(X)$ は Y と一致するかもしれないし，一致しないかもしれないのだが，特に $f(X) = Y$ が成り立つ写像は重要である.

[*4] このネーミングのココロも，B の元から矢印を逆向きにたどってたどり着くような元の全体が $f^{-1}(B)$ であることから分かるだろう．つまり，B をまるごと f で逆向きに写したようなイメージである.

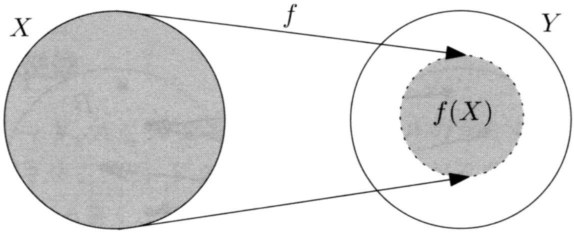


図 4.6　$f(X) \subset Y$.

定義 4.7. (全射)

$f : X \to Y$ が

$$f(X) = Y$$

を満たすとき，f は**全射 (surjection)** であるという．

$f : X \to Y$ が全射であるとしよう．このとき，$f(X) = Y$ なので，$\forall y \in Y$ に対し，$y \in f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ となる．つまり，必ずある元 $x' \in X$ が存在し，$y = f(x')$ と表せる．このように f が全射であるということは，Y のどの元を取ってきても，必ず「f によって何か $(x' \in X)$ が写ってきた先」になっているということに他ならない (図 4.7)．以上より次が得られる．

命題 4.8. (全射の言い換え)

$f : X \to Y$ が全射であることと，次が成り立つことは同値である．

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ s.t. } y = f(x).$$

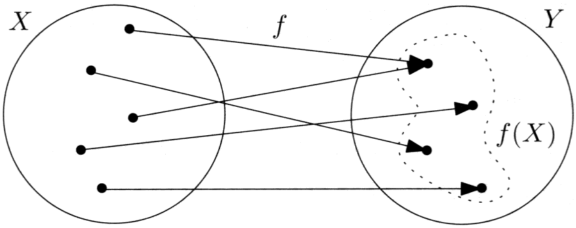


図 4.7 「f が全射」のイメージ図．この図からも分かる通り，$y \in Y$ に対して，$y = f(x)$ となるような $x \in X$ は複数個あり得ることもある．

ある写像が全射であることを証明したいときは，基本的に命題 4.8 を使うことが多い（命題 4.8 は定義 4.7 をほんの少し書き換えただけなので，別にどちらを使っても問題はないのだけど）．

全射と同じくらい重要なもうひとつの概念を示そう．$f : X \to Y$ を使って $x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2)$ を写すとき，$f(x_1) = f(x_2)$ となってしまったと仮定する (図 4.8)．

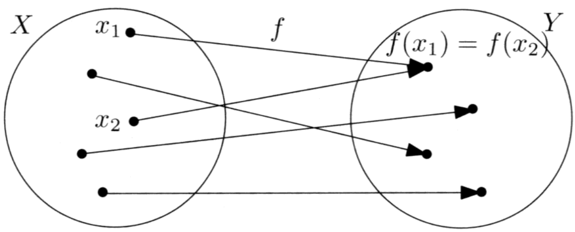


図 4.8 写る前は違ったのに，写った先で同じになった例．

このとき，$y = f(x_1) = f(x_2) \in Y$ として y を取ったとき，f によって y に写ってきた X の元は x_1, x_2 として 2 つ一応は定まるのだが，これがきちんと$y \in Y$ に対してただ一つに定まってほしい $\cdots$ というのがやはり自然に生まれる気持ちである．そして，このような不都合なシチュエーションが起こらない「良い写像」というものに，やはり興味が生まれてくるわけだ．

定義 4.9. (単射)
写像 $f : X \to Y$ が $x_1, x_2 \in X$ に対して次の性質を満たすとき，f は**単射 (injection)** であると言う．

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

この定義は，日本語で「違うものは違うところに写る」写像であると言うことができる．このとき，先ほど述べた「不都合なシチュエーション」は起こることがない．すなわち，$y \in Y$ がもしもある $x \in X$ が f により写ってきた先になっているならば，その x はただひとつに定まる．

定義 4.9 は意味がとても分かりやすい定義ではあるが，定義 4.9 に現れる「$\neq$」というのは，実は少々扱いにくい．よって，ある写像 $f : X \to Y$ が単射であることを証明するときは，次の命題を使うことがほとんどだ．

命題 4.10. (単射の必要十分条件)
$f : X \to Y$ が単射であることと，次の性質は同値である．

$$x_1, x_2 \in X \text{ に対し，} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

これは，「命題とその対偶は真偽が一致する」ことから，明らかに定義 4.9 と同値であることが分かる．

例 4.11. (テストの点数を対応させる写像)
ある学校の 30 人の生徒からなるクラス (生徒の集合) を A と置こう．そして，各学生を $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ と書くことにする．

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{ x_1, x_2, \ldots, x_{30} \}.$$

いま，A の学生全員が 100 点満点の数学のテストを受けた．$x \in A$ (A の学生 x) に対して，x の数学の試験の点数を対応させる写像を $p : A \to \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$ としよう．

- <u>p は単射かもしれないし，単射ではないかもしれない．</u>
  A の全員が違う点数を取れば p は単射になるが，同じ点数を取った 2 人の学生 x_i, x_j がもし存在したとすれば，$x_i \neq x_j$ $(i, j \in \{1, 2, \ldots, 30\})$ かつ $f(x_i) = f(x_j)$ となるので，p は単射でなくなる．
- <u>p は全射にはならない．</u>
  p が全射になるためには，各 $0, 1, 2, \ldots, 100$ に対して，その点数を取った学生 $x \in A$ が存在しなければならないが，A には学生が 30 人しかいないので，これは起こりえない．

例 4.12. ($f(x) = x^2$ は単射だったり全射だったり，そうでもなかったり)

$\mathbb{R}_{\geq 0} \overset{\text{def}}{=} \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$ と定義しよう (つまり $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負実数の全体)．このとき，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を，$f(x) = x^2$ と定める．

- <u>$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は全射である．</u>
  なぜなら，$x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，$\pm\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ である．$f(\pm\sqrt{x}) = x$ なので，命題 4.8 が成り立っている．
- <u>$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は単射ではない．</u>
  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ とすると，$x \neq -x$ だが，$f(x) = f(-x) = x^2$ である．これは定義 4.9 を満たさないので，単射でない．

ところで，$f(x) = x^2$ は $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $\mathbb{R}$ の元 $x^2 \in \mathbb{R}$ に対応させる写像 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ とみなすこともできる．このようにみなしても写像の実体は変わっていないが，「単射」なのか「全射」なのかには大幅な違いが生まれる．

- <u>$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ は全射ではない．</u>
  なぜなら，$y < 0$ とすれば，$y = f(x) = x^2$ を満たす $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は存在しない (2 乗して負になる実数は存在しない)．

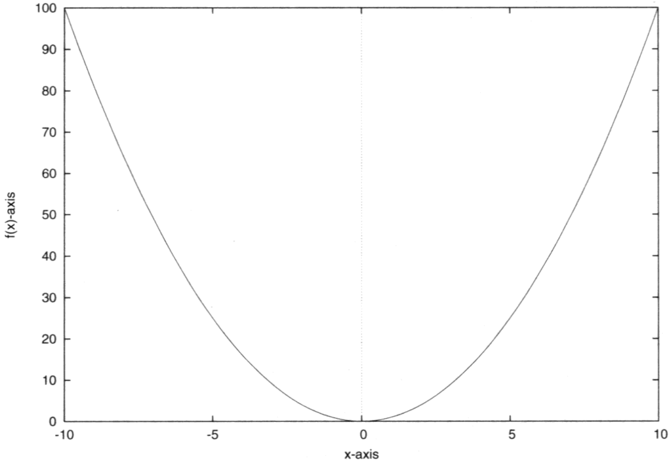


図 4.9 $f(x) = x^2$ のグラフ (x 軸の右半分が $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

- $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ は単射である.
  なぜなら，$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x_1 \neq x_2$ なら，$x_1^2 \neq x_2^2$ である．これは，図 4.9 からも直感的に納得できるだろう.

ここから理解してほしいのは, 写像を決める規則自体は同じでも, 始域と終域のとりかたを変えることで, 全射なのか，単射なのか，は簡単に変わってしまうということだ．なので，写像を扱うときは常に始域と終域がどこなのかを意識しなければ，重大な誤解をしてしまうおそれがある.

4.2.3 全単射と逆写像

全射であり，かつ単射である写像は特に重要な役割を果たす.

定義 4.13. (全単射)
$f : X \to Y$ が全射かつ単射であるとき，f は**全単射 (bijection)** であるという．

$f : X \to Y$ は全単射であるとしよう．このとき，

- f は単射なので，f の異なる元は異なるところに写る (図 4.10).

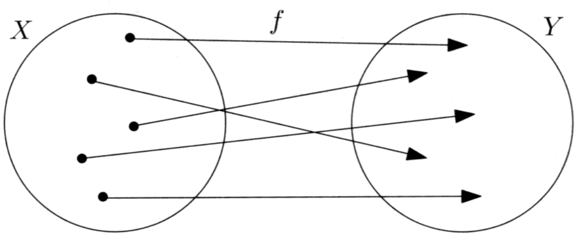


図 4.10　X の元は f によってばらばらに写る．

- さらに，f は全射なので，$f(x)$ $(x \in X)$ は Y を覆い尽くす (図 4.11).

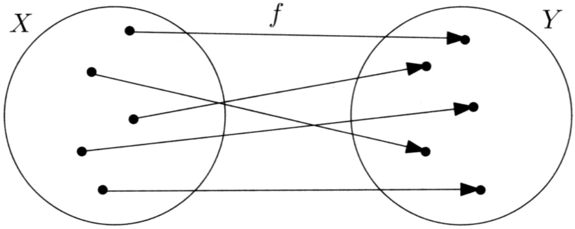


図 4.11　$f(x)$ $(x \in X)$ は Y を覆い尽くす $(f(X) = Y)$.

これはすなわち，X と Y の元の間に，f によって一対一の対応が付いていることに他ならない[*5].

さて，$f : X \to Y$ が全単射であるならば，任意の $y \in Y$ に対して，$y = f(x)$ を満たす $x \in X$ が存在し（f が全射だから），その $x \in X$ はただひとつ定まる（f は単射だから）．よって，$y \in Y$ に対してこの $x \in X$ を対応させる写像 $g : Y \to X$ を考えることが出来る[*6].

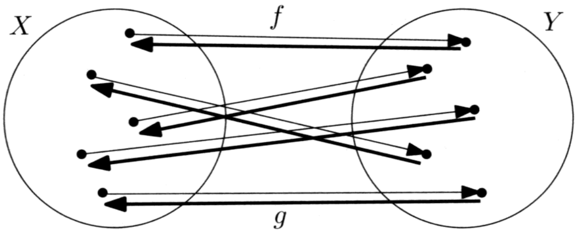


図 4.12 太線矢印が $g : Y \to X$ を表す（すなわち，g は f の逆向きの写像）．

定義 4.14. (逆写像)
全単射 $f : X \to Y$ に対して，上記のように定まる写像 $g : Y \to X$ を f の**逆写像 (inverse map)** と呼び，f^{-1} と表す．

全単射 $f : X \to Y$ に対しては，必ず逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ を構成することが出来る．さらに，図 4.12 を見ても直感的に分かるように，任意の $x \in X$ を f で写し，その後 $f(x)$ を f^{-1} で写すと，再び x 自身に戻るはずである．このことをこれから，数学的に記述してみよう．

---

*5 この事実から，全単射であることを**一対一対応 (1 to 1 correspondence)** と呼ぶ人もいる．

*6 もし f が全射でなかったら，単射でなかったら，このような $g : Y \to X$ を考えることはできない．なぜか？

定義 4.15. (合成写像)
写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対して，$g \circ f : X \to Z$ を次で定め，f と g の**合成写像 (composition map)** と呼ぶ.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X).$$

f と g の合成写像 $g \circ f$ は，「f で写してから g で写す」という規則によって定まる新たな写像である (イメージは図 4.13).

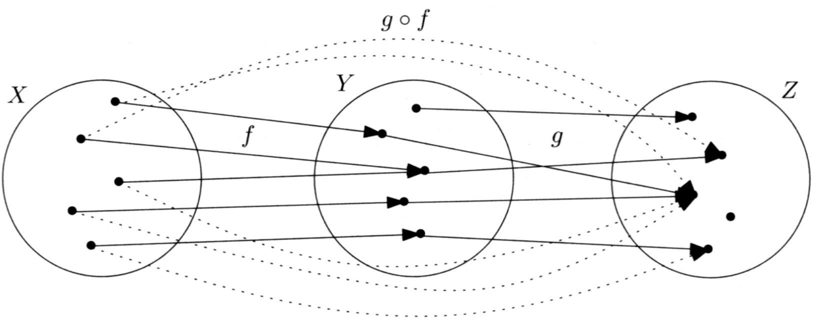


図 4.13　合成写像のイメージ図 (点線矢印が $g \circ f$).

定義 4.16. (恒等写像)
集合 X に対して，次の規則で定まる写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ を X の**恒等写像 (identity map)** と言う.

$$\mathrm{id}_X(x) = x.$$

恒等写像は $x \in X$ を x 自身に写す．すなわち，「何も変えない」写像である．単純すぎて意味がなさそうに見えるこの写像も，全単射の性質を数学的に記述するためには必要不可欠だ．恒等写像は全単射である．

定理 4.17. (全単射の必要十分条件)
$f: X \to Y$ が全単射であることは，ある写像 $g: Y \to X$ が存在して，次を満たすことと同値である．

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \ f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Proof. 同値だと示したいので，$\Rightarrow, \Leftarrow$ の両方が成り立つことを示す．
$\boxed{\Rightarrow}$ $f: X \to Y$ が全単射より，逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ が存在し，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ を満たす．よって，$g = f^{-1}$ とすればよい．
$\boxed{\Leftarrow}$ f が全射であることを示す．任意の $y \in Y$ に対して，$g(y) \in X$ であり，$f(\underbrace{g(y)}_{\in X}) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y$ である．よって，f は全射．

f が単射であることを示す．$x_1, x_2 \in X$ に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ を仮定する．両辺を g で写すと，$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ であり，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ より，$x_1 = x_2$ を得る．よって，f は単射．以上より，f は全単射である． □

すなわち，全単射にはもちろん逆写像が存在するが，さらに，「逆写像に相当する写像」が存在するような写像は全単射である!! ということが，定理 4.17 から分かる．つまり，ある写像が与えられ，全単射だと示したいときは，(もちろん，愚直に全射と単射を示しても良いのだが)「逆写像に相当する写像」をおりゃっと構成してしまえば，それだけで全単射であることを示したことになるのだ．

4.3 線形写像の定義

さて，いよいよここから，線形写像について考えて行こう．線形写像は，線形空間からの線形空間への写像で，特に良い性質を満たすものである．線形空間の様々な性質や，線形空間同士の関係を明らかにするために線形写像はきわめて重要な役割を演じる．ゆっくり確実に理解をしながら，先に進んで行こう．

定義 4.18. (線形写像)
V, W を $\mathbb{R}$-線形空間とする．写像 $f : V \to W$ が次の 2 つの性質を満たすとき，f を V から W への**線形写像 (linear map)** であるという．

1. $\forall v_1, v_2 \in V,\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ \forall v \in V, f(cv) = cf(v)$.

この線形写像こそがこれからの議論の主役となって行くのだが，とりあえずまずは，線形写像の例をいくつか見てみることにしよう．

例 4.19. (行列によるベクトルの変換)
$M(m, n; \mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{ A \mid A$ は実数成分の $m \times n$ 行列 $\}$ と置こう．
($M(n, n; \mathbb{R}) = M(n; \mathbb{R})$ である)
$v \in \mathbb{R}^n, A \in M(m, n; \mathbb{R})$ とし, 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を次のように定義する．

$$f(v) \overset{\text{def}}{=} Av.$$

この f は線形写像である．なぜなら，行列の積，スカラー倍の性質 (1.6 節)

により，$v, w \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ とすると，

$$\begin{aligned} f(v+w) &= A(v+w) \\ &= Av + Aw \\ &= f(v) + f(w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(cv) &= A(cv) \\ &= cAv \\ &= cf(v). \end{aligned}$$

よって，f は線形写像である．すなわち，行列によるベクトルの変換（積）によって定まる写像は線形写像である．

例 4.20. (多項式の微分)

例 3.5 で定義した P_n について考えよう．

$$P_n = \{\, a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \,\}.$$

今，写像 $D : P_n \to P_{n-1}$ を次の規則によって定義する[*7]．

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

このとき，D は線形写像となる．これを証明してみよう．$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \in P_n$ とする．

$$\begin{aligned} &D((a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n)) \\ &= D((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n) \\ &= (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)x + 3(a_3 + b_3)x^2 + \cdots + n(a_n + b_n)x^{n-1} \\ &= (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^n) + (b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots n b_n x^{n-1}) \\ &= D(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + D(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n). \end{aligned}$$

[*7] この写像は，多項式の**微分 (differential)** に他ならない．ちなみに，多項式のみならず，一般に微分は線形写像となる．

さらに，$c \in \mathbb{R}$ とする．

$$\begin{aligned}
&D(c(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)) \\
&= D(ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2 + \cdots + ca_n x^n) \\
&= ca_1 + 2ca_2 x + 3ca_3 x^2 + \cdots + nca_n x^{n-1} \\
&= c(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1}) \\
&= cD(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n).
\end{aligned}$$

よって，D は線形写像である．

他にもさまざまな重要な写像が，実は線形写像であったということは往々にしてあるのだが，逆に，線形写像にはなっていないような写像も，簡単に構成することができる．

例 4.21. $(f(x) = x^2)$

例 4.12 でも考えたように，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次の規則によって定義する．

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} x^2.$$

始域と終域の取り方によって単射になったり全射になったり忙しかったこの写像だが，実は f は線形写像ではない．なぜなら $x, y \in \mathbb{R}$ とすると，

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy = f(x) + f(y) + \underbrace{2xy}_{\text{余計!!}}.$$

というように，余計な項が登場してしまい，一般に $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$ となってしまう．よって，f は線形写像ではないのだ．

さて，ここで線形写像が満たす基本的な性質を 2 つ挙げておこう．

命題 4.22. (線形写像はゼロベクトルをゼロベクトルに写す)
$f : V \to W$ を線形写像としたとき,

$$f(0_V) = 0_W.$$

ただし, $0_V, 0_W$ はそれぞれ V, W のゼロベクトルである.

本書では今後, 特に断ることなく V, W のゼロベクトルを $0_V, 0_W$ と書くことにしよう.

命題 4.23. (線形写像の必要十分条件)
$f : V \to W$ が線形写像であることは, 次と同値である.

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2).$$

4.4　線形写像の像と核

まず, 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義しよう.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \end{pmatrix}.$$

今, 第 1 成分と第 2 成分が等しいベクトル $\binom{t}{t} \in \mathbb{R}^2 \quad (t \in \mathbb{R})$ を f によって写してみよう.

$$f\left(\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - t \\ t - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって, 第 1 成分と第 2 成分が等しい $\mathbb{R}^2$ のベクトルは, f によってゼロ

ベクトルに写されることが分かった．すなわち，
直線 $y = x$ 上のベクトルは全てゼロベクトルに写される (図 4.14).

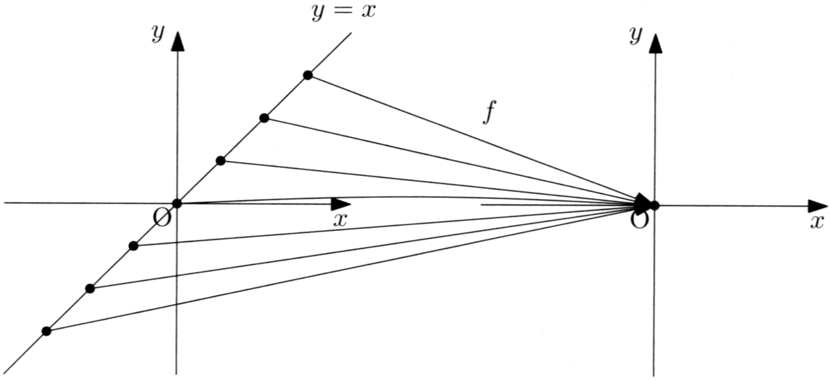


図 4.14　$y = x$ 上のベクトルは全てゼロベクトルに写る．

この「直線 $y = x$」とは「f によってゼロベクトルに写るベクトルの集合」，すなわち，次の連立方程式の解である．

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{f\left(\binom{x}{y}\right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

一般の線形写像 $f : V \to W$ についても，f によってゼロベクトルに潰れる集合が，これから非常に重要な役割を果たす．

定義 4.24. (線形写像の核)
線形写像 $f : V \to W$ に対して，次のように定まる集合 $\mathrm{Ker}\, f$ を，f の**核 (kernel)** と言う (図 4.15).

$$\mathrm{Ker}\, f \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, v \in V \mid f(v) = 0_W \,\} \subset V.$$

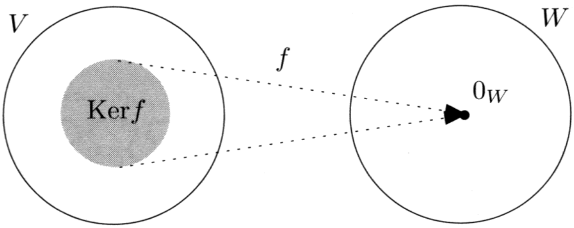


図 4.15　Ker f のイメージ図

つまり，線形写像 f によってゼロベクトルに潰れる（退化する）ベクトルの全体として定まる集合に $\mathrm{Ker}\, f$ という名前をつけて扱うことにするのだ．例えば，最初に扱った線形写像

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

については，

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である（この集合は，直線 $y = x$ と一致する）．

命題 4.25. (Ker f は部分空間)
$f: V \to W$ を線形写像とする. Ker f は V の部分空間である.

Proof. Ker f が命題 3.18 を満たすことを示そう.

1. $\underline{\mathrm{Ker}\, f \neq \varnothing.}$
   命題 4.22 より, $f(0_V) = 0_W$ なので, $0_V \in \mathrm{Ker}\, f$. よって, $\mathrm{Ker}\, f \neq \varnothing$.
2. $\underline{\forall v, w \in \mathrm{Ker}\, f,\ v + w \in \mathrm{Ker}\, f.}$
   $v, w \in \mathrm{Ker}\, f$ とする. このとき, $f(v) = f(w) = 0_W$ である. f は線形写像なので, $f(v+w) = f(v) + f(w) = 0_W + 0_W = 0_W$ なので, $v + w \in \mathrm{Ker}\, f$.
3. $\underline{\forall v \in \mathrm{Ker}\, f, \forall c \in \mathbb{R},\ cv \in \mathrm{Ker}\, f.}$
   $v \in \mathrm{Ker}\, f, c \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $f(v) = 0_W$ である. f は線形写像なので, $f(cv) = cf(v) = c0_W = 0_W$. よって, $cv \in \mathrm{Ker}\, f$.

よって, Ker f は V の部分空間である. □

定義 4.26. (退化次数)
線形写像 $f: V \to W$ に対して,

$$\mathrm{null}\, f \overset{\mathrm{def}}{=} \dim(\mathrm{Ker}\, f)$$

と置き, f の**退化次数 (nullity)** と呼ぶ.

Ker f は f によってゼロベクトルに「潰れる」集合なので, null f は「何

次元分がゼロベクトルに潰れるのか」を表している．

例 4.27. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

によって定まる線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, f(x) = Ax$ を考える．$\operatorname{Ker} f$ の一組の基底と退化次数 $\operatorname{null} f$ を求めてみよう．まず，$\operatorname{Ker} f$ は f によって $\mathbb{R}^2$ のゼロベクトルに写る $\mathbb{R}^4$ のベクトル全体なので，次の連立方程式の解に他ならない．

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{f(x)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立方程式の解を求めよう．拡大係数行列に掃き出し法を適用すると，

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

連立方程式の形に戻すと，

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases}$$

$x_3 = s, x_4 = t \ (s, t \in \mathbb{R})$ とすると，

$$x_1 = \frac{s - 5t}{2}, x_2 = -\frac{5s + 3t}{4}, x_3 = s, x_4 = t$$

を得る．よって，連立方程式の解ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-5t}{2} \\ -\frac{5s+3t}{4} \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5/2 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{4} \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

よって，Ker f の任意のベクトルはこの形で表せるので，

$$\operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であり，$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ は線形独立なので，Ker f の基底である．

よって，null $f = 2$.

さて，Ker f と必ずセットで登場するもう 1 つの重要な集合を定義しよう．

定義 4.28. (線形写像の像)
$f : V \to W$ を線形写像とする．

$$\operatorname{Im} f \overset{\text{def}}{=} f(V) \ (\subset W)$$

とし，Im f を f の**像 (image)** と呼ぶ．

定義 4.5 で，写像の「像」を定義してあったのだが，線形写像 f に対しては $f(V)$ を特に Im f と表すことにする．わざわざ新しい名前をつけるのは，次の性質を持つ特別な集合であることが理由である．

命題 4.29. (像は部分空間)
$\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である.

Proof. $\mathrm{Im}\, f$ が命題 3.18 を満たすことを示そう.

1. $\mathrm{Im}\, f \neq \varnothing$.
   命題 4.22 より, $f(0_V) = 0_W$ なので, $0_W \in \mathrm{Im}\, f$. よって, $\mathrm{Im}\, f \neq \varnothing$.
2. $\forall v, w \in \mathrm{Im}\, f,\ v + w \in \mathrm{Im}\, f$.
   $v, w \in \mathrm{Im}\, f$ とする. このとき, ある $v', w' \in V$ が存在して, $f(v') = v, f(w') = w$ を満たす. $v' + w' \in V$ であり, さらに f は線形写像なので, $f(v' + w') = f(v') + f(w') = v + w$. よって, $v + w \in \mathrm{Im}\, f$.
3. $\forall v \in \mathrm{Im}\, f, \forall c \in \mathbb{R},\ cv \in \mathrm{Im}\, f$.
   $v \in \mathrm{Im}\, f, c \in \mathbb{R}$ とする. このとき, ある $v' \in V$ が存在して $f(v') = v$ を満たす. $cv' \in V$ かつ f は線形写像なので, $f(cv') = cf(v') = cv$. よって, $cv \in \mathrm{Im}\, f$.

以上より, $\mathrm{Im}\, f$ は V の部分空間である. □

定義 4.30. (階数)
線形写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\mathrm{rank}\, f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

と置き, f の**階数 (rank)** と呼ぶ.

例 4.31. 例 4.27 の $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ の像 $\operatorname{Im} f$ の 1 組の基底と，f の階数 $\operatorname{rank} f = \dim(\operatorname{Im} f)$ を求めてみよう．まず，$v \in \operatorname{Im} f$ を取ると，ある $x \in \mathbb{R}^4$ によって次のように表せる．

$$v = \underbrace{Ax}_{f(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} x_4.$$
$$\in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

よって，

$$\operatorname{Im} f \subset \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

一方，$v \in \left\langle \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{-1}, \binom{4}{5} \right\rangle$ とすると，ある $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ によって，

$$v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と表せる．このとき，

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \right).$$

なので，$v \in \operatorname{Im} f$．よって，$\left\langle \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{-1}, \binom{4}{5} \right\rangle \subset \operatorname{Im} f$．以上より，

$$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

である．一般に，ある行列 A により表される線形写像 f が与えられたとき，$\operatorname{Im} f$ は A の列ベクトルが張る空間に一致する（今の議論と全く同じ議論がいつでも出来る）．

さて，$\operatorname{Im} f$ の基底を求めたいわけだが，$\operatorname{Im} f = \left\langle \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{-1}, \binom{4}{5} \right\rangle$ なので，結局この張る空間の基底を求めれば良い．よって，右辺の 4 本のベクトルの中から

1. 線形独立である．
2. 任意の $v \in \left\langle \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{-1}, \binom{4}{5} \right\rangle$ を線形結合で表せる．

という 2 条件を満たすベクトルの組を選べば，それが $\operatorname{Im} f$ の基底である．

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

なので，任意の $v \in \left\langle \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{-1}, \binom{4}{5} \right\rangle$ はある $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ によって，

$$v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．さらに，$\binom{1}{2}, \binom{2}{0}$ は線形独立なので，$\binom{1}{2}, \binom{2}{0}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底である．よって，$\operatorname{rank} f = \dim(\operatorname{Im} f) = 2$ で，$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ である．

さて，例 4.27, 例 4.31 で扱った $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ に対する $\operatorname{null} f, \operatorname{rank} f$ の値に注目してみよう．

$$\operatorname{null} f = 2, \operatorname{rank} f = 2.$$

今からする話はあくまで直感的な話でしかないが，$\mathbb{R}^4$ のうち，f により「潰れてしまう」分の次元が $2(= \operatorname{null} f)$，「潰れずに写る」分の次元が $2(= \operatorname{rank} f)$ である，ということが，何となく納得出来るのではないだろうか (図 4.16)．

このイメージから期待したいのは，

$$\dim \mathbb{R}^4 = \underbrace{\operatorname{rank} f}_{\text{潰れない分}} + \underbrace{\operatorname{null} f}_{\text{潰れる分}}$$

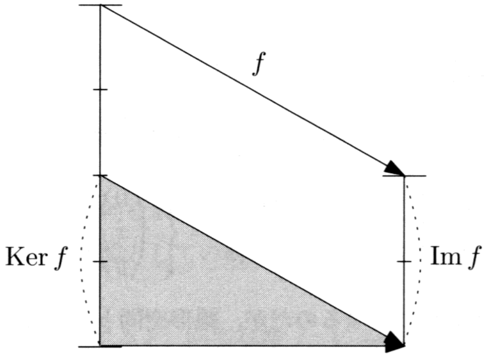


図 4.16 潰れる 2 次元分の Ker f と，潰れずに写った 2 次元分の Im f.

が成り立っているのでは？ということだが，この場合，

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{4} = \underbrace{\operatorname{rank} f}_{2} + \underbrace{\operatorname{null} f}_{2}$$

であり，なるほど，確かに予想通りだ．実はこの結果は，一般の線形写像について成り立つ．以下にその定理を述べよう．

定理 4.32. (線形写像の次元定理)
線形写像 $f: V \to W$ について次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) \\ &= \operatorname{rank} f + \operatorname{null} f\end{aligned}$$

この「線形写像の次元定理」は，線形代数の一つの頂であると言っても良いだろう．本書の最終目標は，この「線形写像の次元定理」の証明である．詳しくは次章で扱うことになるので，楽しみにしていてほしい．

4.5 同型写像

本章の最初にも述べたが，次の 2 つの $\mathbb{R}$-線形空間 ($\mathbb{R}^3$ の部分空間)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

は，集合としては確かに異なるのだが，線形空間としてはどちらも $\mathbb{R}^2$ と同じ構造を持っていることが明白で，果たしてこれらを本当に「区別する必要がある」のだろうか？という素朴な疑問があった．本章の最後に，この問の答えを与えることにしよう．

定義 4.33. (同型写像)
線形写像 $f : V \to W$ が全単射であるとき，f を**同型写像 (isomorphism)** と呼ぶ．

定義 4.34. (同型)
2 つの $\mathbb{R}$-線形空間 V, W の間に同型写像が存在するとき，V と W は（$\mathbb{R}$-線形空間として）**同型 (isomorphic)** であると言い，$V \simeq W$ と表す．

4.5.1 同型な線形空間

$\mathbb{R}$-線形空間 V と W の間に全単射な線形写像が存在するならば V と W は同型 $(V \simeq W)$ であると言いましょう $\cdots$ と，とりあえず約束はしたものの，$V \simeq W$ はそもそも何を表しているのだろうか．実は，$V \simeq W$ であるとき，V と W は線形空間としての構造が全く同じになる．このことについて説明してみよう．

まず，$V \simeq W$ を仮定すると，同型写像 $f : V \to W$ が存在する．f は全単射なので，V と W のベクトルの間に一対一の対応関係が作れる (図 4.17).

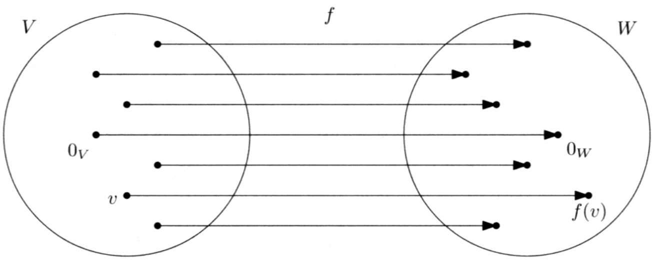


図 4.17　f による V と W のベクトルの対応関係.

$v, w \in V$ としよう．V は $\mathbb{R}$-線形空間なので，$v + w \in V$ である (図 4.18).

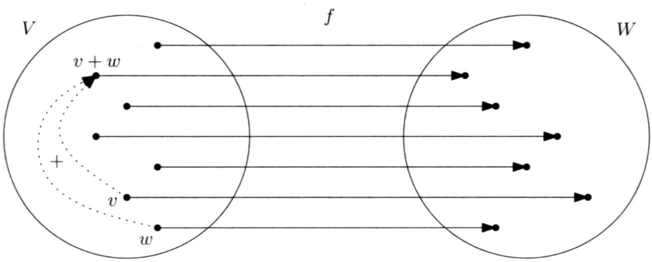


図 4.18　$v, w \in V \Rightarrow v + w \in V$.

それでは今度は，$v, w \in V$ を f によって $f(v), f(w) \in W$ に写してから和をとってみることにしよう．すると，f は線形写像なので，

$$f(v) + f(w) = f(v + w)$$

であり，「写してから和をとった」結果は，「和をとってから写した」結果に一致している (図 4.19)．もし，$f(v) + f(w)$ が，$f(v + w)$ とてんで違うと

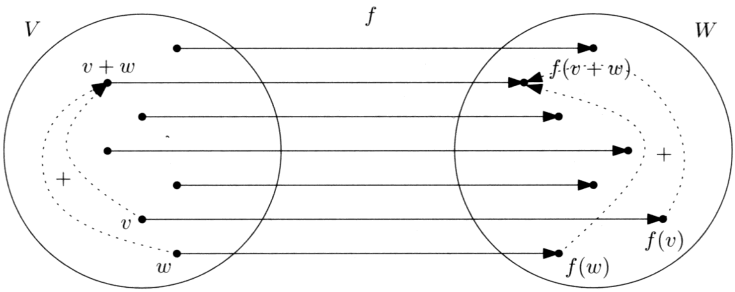


図 4.19　和の「行き先」が，写す前と写す後で綺麗に対応．

ころに対応してしまっていたら，V と W では和の構造が全く違ってしまっているということになるのだが，f が線形写像であることにより，きちっと和の構造が V と W の間で保存されていることがわかる．

スカラー倍についても，和の場合と全く同じ議論で「写す前と後でのスカラー倍による行き先」が保存されていることがわかる (図 4.20)．つまり，V, W はスカラー倍の構造が同じだ．

以上の議論が，V と W が線型空間として全く同じ構造を持っているという理由である．もちろん，V と W は集合としては一般に異なるのだが，f という「ベクトルの名前の付け替え」によって，全く構造が同じ線形空間となっている．同型な線形空間は，線形空間としての構造のみに着目するのならば，区別する必要がない．

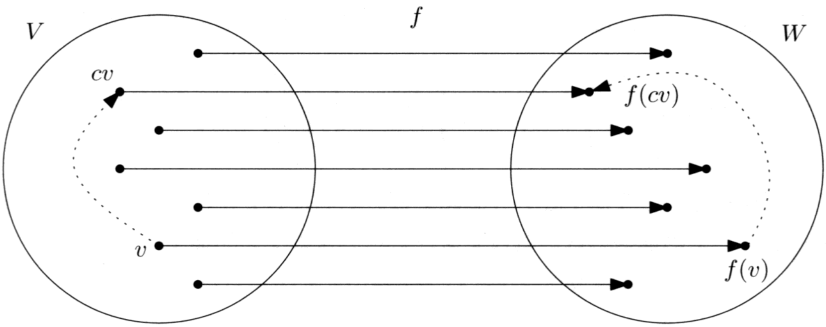


図 4.20　スカラー倍の「行き先」が，写す前と写す後で綺麗に対応．

命題 4.35. ($\simeq$ の性質)
U, V, W を $\mathbb{R}$-線形空間とする．

1. $V \simeq V$　(自分と自分は同型)
2. $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$　(V と W が同型なら W と V は同型)
3. $U \simeq V, V \simeq W \;\Rightarrow\; U \simeq W$　(同型の同型とは同型)

Proof.　1. $\mathrm{id}_V : V \to V$ は同型写像である．

2. $V \simeq W$ より同型写像 $f : V \to W$ が存在する．f は全単射なので逆写像 $f^{-1} : W \to V$ が存在し，f^{-1} は同型写像である．
3. $U \simeq V$ より同型写像 $f : U \to V$ が存在し，$V \simeq W$ より同型写像 $g : V \to W$ が存在する．$g \circ f : U \to W$ は同型写像である．

(詳細な証明は章末問題に回した)．　□

ここまでくれば，最初に挙げた 2 つの $\mathbb{R}$-線形空間 ($\mathbb{R}^3$ の部分空間)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

を区別すべきかどうか？という問題には必然的に答えが出る．これらは「線形空間としての構造だけに着目するならば，区別する必要がない」．

なぜなら，$f : V \to \mathbb{R}^2, g : W \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって定義すれば，これらは同型写像である．よって，$V \simeq \mathbb{R}^2, W \simeq \mathbb{R}^2$. 命題 4.35 より，$V \simeq W$ だ．これが，この問の答えである．

命題 4.36. $\mathbb{R}$-線形空間 V, W に対して，

1. 全射線形写像 $f : V \to W$ が存在すれば，$\dim V \geq \dim W$.
2. 単射線形写像 $f : V \to W$ が存在すれば，$\dim V \leq \dim W$.
3. 同型写像 $f : V \to W$ が存在するならば，$\dim V = \dim W$.

Proof. 1. $w_1, w_2, \ldots, w_r$ を W の基底としよう．このとき，$v_i \in V$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) が存在して，$w_i = f(v_i)$ と表せる (f が全射だから)．このとき，$v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ は線形独立である．なぜなら，

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r = 0_V$$

と置いて両辺を f で写すと，

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_r w_r = 0_W.$$

$w_1, w_2, \ldots, w_r \in W$ は W の基底なので線形独立である．よって，$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ なので，$v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ は線形独立．$\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ は V の部分空間で，$v_1, v_2, \ldots, v_r$ は線形独立なので，$\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ の基底である．この基底にいくつかのベクトルを加えて V の基底を構成できる (命題 3.20) ので，$r \leq \dim V$ である．

2. $v_1, v_2, \ldots, v_l$ を V の基底としよう．$f(v_i) = w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ と置くと，$w_1, w_2, \ldots, w_l \in W$ は線形独立である．なぜなら，

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_l w_l = 0_W$$

と置いて両辺を変形すると，

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_l v_l) = f(0_V).$$

f は単射なので，

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_l w_l = 0_V$$

であり，$v_1, v_2, \ldots, v_l \in V$ が線形独立であることから，$c_1, c_2, \cdots, c_l = 0$. よって，$w_1, w_2, \ldots, w_l \in W$ は線形独立．これより $w_1, w_2, \ldots, w_l$ は W の部分空間 $\langle w_1, w_2, \ldots, w_l \rangle$ の基底であり，命題 3.20 より，$w_1, w_2, \ldots, w_l$ にいくつかのベクトルを加えて W の基底を構成できる．よって，$\dim W \geq l$.

3. f は全単射なので，$\dim V \geq \dim W$ かつ $\dim V \leq \dim W$. よって，$\dim V = \dim W$ である．

□

4.6　章末問題

1. X, Y, Z を集合とするとき，次を示せ．
   (i) $f : X \to Y, g : Y \to Z$ がともに全射であるなら，$g \circ f : X \to Z$ も全射．
   (ii) $f : X \to Y, g : Y \to Z$ がともに単射であるなら，$g \circ f : X \to Z$ も単射．
   (iii) $f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対して，$g \circ f : X \to Z$ が全射なら，g は全射．
   (iv) $f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対して，$g \circ f : X \to Z$ が単射ならば，f は単射．

2. 写像 $f : X \to Y$ について次を示せ．
   (i) $A \subset X \Rightarrow f(A) \subset f(X)$．
   (ii) $B \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Y)$．
   (iii) $A_1, A_2 \subset X \Rightarrow f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
   (iv) $A_1, A_2 \subset X \Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
   (v) $B_1, B_2 \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
   (vi) $B_1, B_2 \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

3. $f : V \to W$ が線形写像であるとき，$f(0_V) = 0_W$ を示せ．

4. $A \in M(n; \mathbb{R})$ に対し，写像 $C_A : M(n; \mathbb{R}) \to M(n; \mathbb{R})$ を

$$C_A(X) = AX - XA$$

   で定義する[*8]．C_A は線形写像であることを示せ．

---

*8 A との**交換子積**と呼ばれる．

5. 線形写像 $f : V \to W$ が単射であることは，$\mathrm{Ker}\, f = \{ 0_V \}$ と同値である．これを示せ．

6. 行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(v) = Av$ によって定義したとき，$\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, f$ の一組の基底と次元をそれぞれ求めよ．

7. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ により，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f(v) = Av$ で定める．以下の問に答えよ．
(a) $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と一組の基底を求めよ．
(b) $\mathrm{Im}\, f$ の次元と一組の基底を求めよ．

8. 次の行列 A が定める線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, f(v) = Av$ を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ，
(a) $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と一組の基底を求めよ．
(b) $\mathrm{Im}\, f$ の次元と一組の基底を求めよ．

9. U, V, W を $\mathbb{R}$-線形空間とする．命題 4.35 の証明を詳細に完成させるために次を示せ．
(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ は同型写像である．

(b) 同型写像 $f: V \to W$ の逆写像 $f^{-1}: W \to V$ は同型写像である．

(c) 同型写像 $f: U \to V, g: V \to W$ の合成写像 $g \circ f: U \to W$ は同型写像である．

10. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2;\mathbb{R})$ に対して，写像 $L: M(2;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を以下で定義する．

$$L(X) = \mathrm{tr}(AX).$$

とし，$M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 W を

$$W \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, X \in M(2;\mathbb{R}) \mid L(X) = 0 \,\}$$

により定める．このとき次を示せ．ただし，$\mathrm{tr}(A)$ は行列 A の対角成分の和（トレース）を表す．

(a) L は線形写像．

(b) W は $M(2;\mathbb{R})$ の部分空間である．

第5章

商線形空間から次元定理へ

前章で，線形写像 $(f : V \to W)$ の次元定理

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$$

を紹介した．しかし，我々はまだこの定理を証明していない．この章の最終目標は，線形写像の次元定理の証明である． この定理は実は高度な議論することなく初等的に証明することも出来るのだが，本章ではあえて，**商線形空間 (quotient linear space)** の理論を経由した，エレガントかつ本質的な証明を完成させることを目標にする．この証明は，実は「群論」という数学の分野における**群の準同型定理 (homomorphism theorem of group)** を線形空間に適用して得られるものである．よって，この章の内容は，もっともっと高度な数学へとつながる扉にもなっていると思う．

内容は少し難しく理解が難しい部分もあるが，その分，必死で理解をしたときの感動も大きいだろう．一緒に着実に，「線形写像の次元定理の証明」という一大目標を目指して進んで行こう!!

5.1 同値関係

さて，本章扱う内容のイメージは，$\mathbb{R}$-線形空間 V とその部分空間 W に対して，V を W で「割って」，新たな $\mathbb{R}$-線形空間 V/W を構成することである．この操作を行うために欠かすことのできない「同値関係」という概念をまずは定義しよう．

5.1.1 “イコール” の性質

突然だが，数と数との関係を表す “イコール (=)” を今まで何度も何度も扱ってきた．この “イコール” のことをを，今一度，じーーーーっくり見つめなおしてみることから始めよう．

命題 5.1. (イコールの性質)
$a, b, c \in \mathbb{R}$ としよう．

1. $a = a$ (自分と自分はイコール)
2. $a = b \Rightarrow b = a$ (a と b がイコールなら b と a はイコール)
3. $a = b, b = c \Rightarrow a = c$ (イコールのイコールとはイコール)

これらの性質は，昔からイコールと付き合い続けてきた我々にとっては，どう考えても当たり前の事実の羅列に見えるかもしれない．しかし，ここで気づいてほしいことは，命題 4.35 との類似点である．

命題 4.35. (同型の性質)
U, V, W を $\mathbb{R}$-線形空間とする.

1. $V \simeq V$ (自分と自分は同型)
2. $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$ (V と W が同型なら W と V は同型)
3. $U \simeq V, V \simeq W \Rightarrow U \simeq W$ (同型の同型とは同型)

どうも明らかに「イコール」と「同型」の性質は似ている. このことから, どうやら「数学的に重要な関係」というのはこういう性質を持っていることが往々にしてあるのではないだろうか？という予想ができる.

こういう時にやることは決まっている.「公理化」である. $\mathbb{R}^n$ を公理化して $\mathbb{R}$-線形空間の広い世界に飛び出せたように, "イコール" を公理化すれば, 何か面白いことが起きるかもしれないのだ.

定義 5.2. (同値関係)
任意の集合 X 上の関係 $\sim$ が次の性質を満たすとき, $\sim$ を X 上の**同値関係 (equivalent relation)** と呼ぶ. $a, b, c \in X$ としよう.

1. $a \sim a$ (**反射律** / **reflexive**)
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (**対称律** / **symmetric**)
3. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (**推移律** / **transitive**)

$a \sim b$ であることを, a と b は $\sim$ によって**同値 (equivalence)** であると言う.

定義から明らかなように，同値関係は「イコールの公理化」[*1]である．これから，“$=$” と “$\simeq$” の他にどんな同値関係があるのか，いくつかの例を見てみよう．

例 5.3. (イコールと同型)

先ほどから見てきているように，$=, \simeq$ は同値関係である．

例 5.4. (命題の同値)

命題 P と Q が同値であることを $P \iff Q$ と表すことにはすでに触れていたが，命題の同値を表す関係 “$\iff$” は同値関係である．

例 5.5. (法として合同)

$a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \,\}$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して
$n\mathbb{Z}_{\geq 0} \overset{\text{def}}{=} \{\, nk \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\}$ と定義する．

$$a \equiv_n b \overset{\text{def}}{\iff} a - b \in n\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

として関係 $\equiv_n$ を定める[*2]と，$\equiv_n$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上の同値関係となる．$a \equiv_n b$ であるとき，a と b は n **を法として合同**であると言う．

5.2 商集合

集合 X の上に同値関係 $\sim$ が与えられているとしよう．$x \in X$ に対して，「x と $\sim$ によって同値な X の元全体」という集合を考えることが出来る．

[*1] もちろん，「同型の公理化」と捉えても良い．

[*2] $a \equiv b \mod n$ と書くことが多いが，本書ではこの記法を採用する．$a \equiv_n b$ は，a と b を n で割ったあまりが等しいことを意味している．

定義 5.6. (同値類)
$x \in X$ に対して，

$$\overline{x} \overset{\text{def}}{=} \{ y \in X \mid x \sim y \}$$

とする．$\overline{x}$ を x を含む $\sim$ による**同値類 (equivalence class)** と呼ぶ．また，x を $\overline{x}$ の**代表元 (leader)** と呼ぶ．

同値類は，「x を含むような，互いに $\sim$ によって同値な元を集めた集合」である．例をひとつ見てみよう．

例 5.7. ($\equiv_3$ による同値類)
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上の同値関係 $\equiv_3$ を考える．$0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\overline{0} = \{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid 0 \equiv_3 n \}$$

(0 を含む $\equiv_3$ による同値類) を考える．$0 \equiv_3 n$ は，「0 と n を 3 で割った余りが等しい」，すなわち，「n を 3 で割った余りが 0」ということなので，

$$\overline{0} = \{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid n \text{ を } 3 \text{ で割った余りが } 0 \}$$

と言える．つまり，元を具体的に書くと

$$\overline{0} = \{ 0, 3, 6, 9, \dots \}.$$

という集合であることが分かる．同様に，

$$\overline{1} = \{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid n \text{ を } 3 \text{ で割った余りが } 1 \}.$$
$$\overline{2} = \{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid n \text{ を } 3 \text{ で割った余りが } 2 \}.$$

であることが分かり，

$$\overline{1} = \{ 1, 4, 7, 10, \dots \}$$
$$\overline{2} = \{ 2, 5, 8, 11, \dots \}.$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の元を 3 で割った余りは $0, 1, 2$ のいずれかなので，$\equiv_3$ による $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の同値類は $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ で全てである．ちなみに，$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ のそれぞれの代表元として $0, 1, 2$ が取れるが，代表元の取り方はこれに限らず，例えば $6, 10, 5$ のような取り方でも良い．なぜなら，

$$\overline{6} = \overline{0},\ \overline{10} = \overline{1},\ \overline{5} = \overline{2}$$

であるからだ．一般に，同値類の代表元の取り方はひと通りではない（同値類に属する任意の元が，その同値類の代表元になれる）．

定義 5.8. (商集合)
集合 X と，その上の同値関係 $\sim$ について，

$$X/\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \overline{x} \mid x \in X \,\}$$

と定義し，X の同値関係 $\sim$ による**商集合 (quotient set)** と呼ぶ．

$X/\sim$ は，「X の $\sim$ による同値類の全体」により定まる新たな集合である．例えば，例 5.7 の場合を考えると，$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ である．

命題 5.9. (同値類の性質)
X の同値関係 $\sim$ による商集合 $X/\sim$ を考える．$x, y \in X$ とする．

1. $y \in \overline{x} \ \Rightarrow\ \overline{y} = \overline{x}$.（同値類の元は同じ同値類を作る）
2. $\overline{x} \neq \overline{y} \ \Rightarrow\ \overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$.（異なる同値類は交わらない）
3. $\displaystyle\bigcup_{x \in X} \overline{x} = X$.（同値類を全部合わせれば全体になる）

ちなみに，3. の

$$\bigcup_{x \in X} \overline{x}$$

は，「$x \in X$ の全体にわたって，$\overline{x}$ の和集合を取ったもの」のことである．たくさんの和を Σ で略記するのと全く同じだと思えば良い．

Proof. 1. $y \in \overline{x}$ としよう．このとき，$x \sim y$ である．

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \{ z \in X \mid y \sim z \} \\ &= \{ z \in X \mid x \sim z \} = \overline{x}.\end{aligned}$$

2 番目の等号は，$x \sim y$ と定義 5.2 により，$x \sim z \iff y \sim z$ が得られることより成り立つ．

2. $\overline{x} \neq \overline{y}$ かつ $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$ を仮定しよう．このとき，$\exists z \in \overline{x} \cap \overline{y}$ であり，1. より, $\overline{z} = \overline{x} = \overline{y}$. これは $\overline{x} \neq \overline{y}$ に矛盾．よって，$\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$.
3. 双方向の包含関係 $\subset, \supset$ を示そう．

   $\boxed{\subset}$ 明らかである．

   $\boxed{\supset}$ 任意の $z \in X$ に対して，$\overline{z}$ を考えると，$z \in \overline{z}$ かつ $\overline{z} \subset \bigcup_{x \in X} \overline{x}$. よって，$z \in \bigcup_{x \in X} \overline{x}$ なので，$X \subset \bigcup_{x \in X} \overline{x}$.

□

命題 5.9 は

1. 集合 X の異なる同値類は交わらない．
2. 同値類は X 全体を覆う．

という主張だが，これはつまり，同値類が X の元の**グループ分け**を与えるということを意味している．そのグループ分けの「ルール」を与えるのが，同値関係 $\sim$ なのである．

例 5.10. ($\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の $\equiv_3$ による商集合)

$\mathbb{Z}_{\geq 0}/\equiv_3 = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \}$ だった．$\mathbb{Z}_{\geq 0}/\equiv_3$ の元（同値類）により，$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は図 5.1 のようにグループ分けされる．

$\overline{0}$	0	3	6	9	12	$\cdots$
$\overline{1}$	1	4	7	10	13	$\cdots$
$\overline{2}$	2	5	8	11	14	$\cdots$

図 5.1　$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の $\equiv_3$ によるグループ分け.

5.3　商線形空間

さて，V は $\mathbb{R}$-線形空間，W をその部分空間としよう．これから，「V を W で割って，新しい線形空間を作る」という操作を行うのだが，その操作は

1. V に「ある同値関係 $\sim$」を定義する.
2. $\sim$ による V の商集合 $V/\sim$ を作る.
3. $V/\sim$ に和とスカラー倍を定義する.

という流れによるものである.

5.3.1　V に同値関係を入れてみる

さて，まず最初に V に同値関係を定義しよう.

定義 5.11. $\mathbb{R}$-線形空間 V とその部分空間 W に対して，

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} u - v \in W.$$

と定義する．$\sim$ は V の同値関係である.

Proof. 定義 5.2 が満たされることを確認しよう．$u, v, w \in V$ とする.

1. $\underline{v \sim v}$.

   命題 3.19 より, $v - v = 0_V = 0_W \in W$. よって, $v \sim v$.

2. $\underline{u \sim v \Rightarrow v \sim u}$.

   $u \sim v$ とすると, $u - v \in W$. このとき, W は $\mathbb{R}$-線形空間なので, $v - u = -(u - v) \in W$. よって, $v \sim u$.

3. $\underline{u \sim v, v \sim w \Rightarrow u \sim w}$.

   $u \sim v, v \sim w$ とすると, $u - v \in W, v - w \in W$. W は $\mathbb{R}$-線形空間なので, $(u - v) + (v - w) = u - w \in W$. よって, $u \sim w$.

よって, $\sim$ は V の同値関係である. □

5.3.2 V の $\sim$ による商集合

次に, V の同値関係 $\sim$ による V の商集合 $V/\sim$ を考える.

$$V/\sim = \{\, \overline{v} \mid v \in V \,\}.$$

v を含む同値類 $\overline{v}$ がどのような形をしているのか考えてみよう. 定義より,

$$\overline{v} = \{\, u \in V \mid u \sim v \,\} = \{\, u \in V \mid u - v \in W \,\}.$$

ここで $u - v \in W$ というのは, ある W の元 w により, $u - v = w$ と表せることを意味するが, $u = v + w$ と変形することにより, 実は $u - v \in W$ は $u \in v + W$ と同値であることが分かる (ただし, $v + W \overset{\text{def}}{=} \{\, v + w \mid w \in W \,\}$).
よって, $\overline{v}$ は次のように表せることが分かる.

$$\overline{v} = \{\, u \in V \mid u - v \in W \,\} = \{\, u \in V \mid u \in v + W \,\} = v + W.$$

これより, $V/\sim = \{\, \underbrace{v + W}_{\overline{v}} \mid v \in V \,\}$ という表現が得られる.

$v + W$ は, イメージ的には W を v の分だけ (W の全てのベクトルに v を加えることにより) 平行移動した集合のように捉えることが出来る. そして, 全ての同値類の和集合は V と一致するので, W の平行移動の全体が V を覆い尽くすことも分かる (図 5.2)

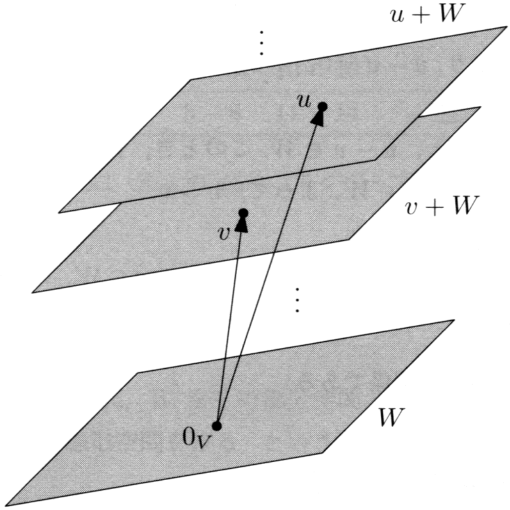


図 5.2 V 全体が W の平行移動（同値類）により埋め尽くされて行く（イメージ）.

5.3.3 V/W

さて，今までの議論により $V/\sim$ を構成し，幾何学的イメージを得ることができた．今後，$V/\sim$ を V/W と書くことにしよう．

$$V/W \overset{\text{def}}{=} V/\sim .$$

これから行うことは，V/W に和とスカラー倍を定義し，V/W を $\mathbb{R}$-線形空間にすることである．

命題 5.12. (V/W の和とスカラー倍)
V/W の和とスカラー倍を次のように定義する.

$$(u+W)+(v+W) \stackrel{\text{def}}{=} (u+v)+W \quad (u+W, v+W \in V/W).$$
$$c(u+W) \stackrel{\text{def}}{=} (cu)+W \quad (c \in \mathbb{R}, u+W \in V/W).$$

この和とスカラー倍について, V/W は $\mathbb{R}$-線形空間となる.

このことを証明する前に, この先その重要性が顕著に現れてくる「well-defined」という概念について触れておかなければならない,

「well-defined」

これから同値類を使った何かを定義するときは常に,

その定義は「well-defined」かどうか?

ということに細心の注意を払わなければならない.

さて,「well-defined」とは一体どんな意味なのだろう. 日本語訳すると「うまく定義されている」. 実は, 数学の文脈における「well-defined」という言葉は, そっくりそのまま,「うまく定義されている」という意味で使われる. ひとつ具体的な例を見てみよう.

例 5.13. ($\mathbb{Z}_{\geq 0}/\equiv_3$ の変な 2 項演算)

集合の元に定義する 2 項演算にはいろいろなものが考えられるが,

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

に次のような変な 2 項演算 $\star$ を定義してみよう.

$$\overline{x} \star \overline{y} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{2^x + 2^y}.$$

さて，この $\star$ は実は 2 項演算としての資格を満たしていない．というのも，

$$\overline{0} \star \overline{0} = \overline{2^0 + 2^0} = \overline{2}$$

である．その一方で，

$$\overline{3} \star \overline{3} = \overline{2^3 + 2^3} = \overline{1}$$

である．今，どうにもおかしなことが起きたことにお気づきだろうか．

$\overline{0} = \overline{3}$ だった (同値類の代表元の取り方にはいろいろあった) のである．ということは，$\overline{0} \star \overline{0} = \overline{3} \star \overline{3}$ となってくれないと，$\star$ は 2 項演算としてどう考えてもおかしいのだ．しかし，計算結果を見てみると，

$$\overline{3} \star \overline{3} \neq \overline{0} \star \overline{0}$$

が得られている．こんなふうに，同じ計算をしているはずなのに，代表元の取り方を変えてしまったがために異なる計算結果が生じてしまったわけだ．こういうことが起こりうるとき，我々は「$\star$ は 2 項演算としての資格を満たしていない!!」という意味を込めて $\star$ は well-defined ではない[*3]と言う．

例 5.14. ($\mathbb{Z}_{\geq 0}/\equiv_3$ の和)

一方，今度は $\mathbb{Z}_{\geq 0}/\equiv_3$ に次のような 2 項演算 $+$ (和) を考えてみる．

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$$

この和では，先ほどのように同じ計算をしているはずなのに，代表元の取り方を変えてしまったがために異なる計算結果が生じてしまうというおかしなことは起こりえない．なぜなら，$\overline{x}, \overline{y}$ からそれぞれの異なる代表元 $x, x' \in \overline{x}, y, y' \in \overline{y}$ を取ると，

$$\begin{aligned}
\overline{x} + \overline{y} &= \overline{x + y} \\
&= \overline{x - x' + x' + y - y' + y'} \\
&= \underbrace{\overline{x - x'}}_{\substack{x \sim x' \text{より} \\ x - x' \in 3\mathbb{Z}_{\geq 0}}} + \underbrace{\overline{y - y'}}_{\substack{y \sim y' \text{より} \\ y - y' \in 3\mathbb{Z}_{\geq 0}}} + \overline{x' + y'} = \overline{x' + y'} = \overline{x'} + \overline{y'}.
\end{aligned}$$

[*3] ill-defined であると言う人もいる．

これより，和は異なる代表元に対しても変わらないということが証明できた．そして，矛盾や不都合が起こらないようにうまく定義できている!! という意味を込めて，この和はwell-definedであると言う．同値類に関する何かを定義するとき，「well-defined である」ということは，ほとんどの場合「その値が代表元の取り方に依存しない」という意味で使われる．

例 5.15. (写像として well-defined でない例)

2 項演算だけではなく，写像に対しても well-defined 性を考える必要がある．$f : \mathbb{Z}_{\geq 0}/\equiv_3 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のように定義する．

$$f(\overline{x}) \overset{\text{def}}{=} x.$$

これは，写像として well-defined でない例として最も単純なものだ．なぜなら，$\overline{0} = \overline{3}$ だが，$f(\overline{0}) = 0, f(\overline{3}) = 3$ より $f(\overline{0}) \neq f(\overline{3})$．このように，代表元の取り方によって対応する値が変わっているので，f は well-defined ではない．

これから扱う内容においては，

well-defined $\leftrightarrow$ 代表元の取り方によらない

という読み替えを行って何ら差し支えないのだが，実際のところ well-defined という言葉はもっと広い意味で使われるということも知っていてほしい．例を挙げてみよう．

例 5.16. ($\mathbb{R}$-線形空間の次元は well-defined)

$\mathbb{R}$-線形空間 V に対して，その基底をなすベクトルの個数を V の次元 $\dim V$ と定義していた．ここで考えなければならないのは，V の基底の取り方にはいろいろなパターンがあるということである．

そして，V の基底の取り方によって基底をなすベクトルの数が変わってしまったとしたら，どれを $\dim V$ として採用すれば良いのか分からないので，$\dim V$ はうまく定義できていない（well-defined ではない）ことになる．

しかし，定理 3.10 より，それは起こりえない．よって，$\mathbb{R}$-線形空間の次元 $\dim V$ はwell-defined である．

さて，命題 5.12 を証明しよう．和とスカラー倍は同値類に対して定義されるので，それらが well-defined なものかどうか，きちんと気をつけるところからはじめなければならない．

Proof. 1. + は well-defined.

$\overline{u}, \overline{v} \in V/W$ とし，$u, u' \in \overline{u}, v, v' \in \overline{v}$ を, $\overline{u}, \overline{v}$ の異なる代表元としよう．$\overline{u} + \overline{v} = \overline{u'} + \overline{v'}$ を示す．

$$\begin{aligned}\overline{u} + \overline{v} &= \overline{u + v} \\ &= \overline{u - u' + u' + v - v' + v'} \\ &= \underbrace{\overline{u - u'}}_{\substack{u \sim u' \text{より} \\ u - u' \in W.}} + \overline{u'} + \underbrace{\overline{v - v'}}_{\substack{v \sim v' \text{より} \\ v - v' \in W.}} + \overline{v'} \\ &= \overline{u'} + \overline{v'}.\end{aligned}$$

よって + は well-defined.

2. スカラー倍は well-defined.

$\overline{u} \in V/W$, $c \in \mathbb{R}$ とし，$u, u' \in \overline{u}$ を $\overline{u}$ の異なる代表元とする．$c\overline{u} = c\overline{u'}$ を示す，

$$\begin{aligned}c\overline{u} &= \overline{cu} \\ &= \overline{cu - cu' + cu'} \\ &= \overline{c(u - u')} + \overline{cu'} \\ &= c \underbrace{\overline{u - u'}}_{u - u' \in W.} + c\overline{u'} = c\overline{u'}\end{aligned}$$

よって，スカラー倍は well-defined.

3. V/W は和について閉じている．

$\overline{u}, \overline{v} \in V/W$ とする．このとき，

$$\overline{u} + \overline{v} = \overline{u+v} \in V/W \quad (u+v \in V \text{ より}).$$

4. <u>V/W はスカラー倍について閉じている.</u>
   $\overline{u} \in V/W, c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，

$$c\overline{u} = \overline{cu} \in V/W \quad (cu \in V \text{ より}).$$

5. <u>V/W は 8 つの代数的規則を満たす.</u>
   V の 8 つの代数的規則を使って簡単に示すことが出来る.

よって，V/W は $\mathbb{R}$-線形空間である. □

この $\mathbb{R}$-線形空間こそが，本章の主役である.

定義 5.17. (商線形空間)
V を $\mathbb{R}$-線形空間，W をその部分空間とする.

$$V/W = \{\, v + W \mid v \in V \,\}$$

に命題 5.12 の和とスカラー倍を考えると V/W は $\mathbb{R}$-線形空間となり，V/W を V の W による**商線形空間 (quotient linear space)** と言う（**商ベクトル空間**と呼ぶことも多い).
V/W のゼロベクトルは W $(= 0_V + W)$, $v + W \in V/W$ の和の逆元は $(-v) + W$ である.

さて，こうやって商線形空間を定義できることは分かったのだが，具体的に商線形空間のイメージはどのようなものになるのだろうか？いくつかの例を考えることによって，直感的なイメージを確認しておこう.

例 5.18. ($\mathbb{R}^3$ とその部分空間による商線形空間)

最も単純な例を考えてみよう．$\mathbb{R}^3$ と，その部分空間

$$W \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^2$$

を考える．この部分空間 W による $\mathbb{R}^3$ の商線形空間 $\mathbb{R}^3/W$ は，

$$\mathbb{R}^3/W = \{ v + W \mid v \in \mathbb{R}^3 \}$$

であるが，$v + W = \{ v + w \mid w \in W \} \in V/W$ は，平面 W をベクトル v によって平行移動して出来る新たな平面を表す (図 5.3).

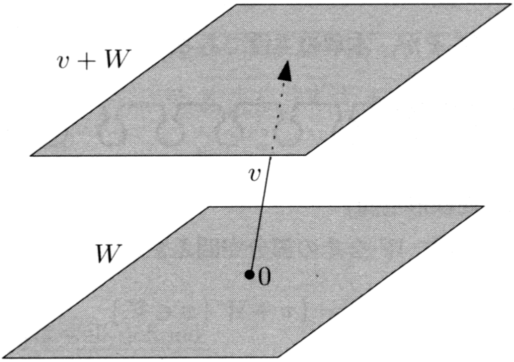


図 5.3　$v + W$ は v による W の平行移動

この全体が図 5.4 のように $\mathbb{R}^3$ 全体を埋め尽くしているというのが，$\mathbb{R}^3/W$ の図形的なイメージである．W の平行移動によって出来る平面を $\mathbb{R}^3/W$ では 1 つの元とみなしているのだ．

さらに，$\mathbb{R}^3/W$ の各平面同士には，和とスカラー倍が命題 5.12 の通りに和とスカラー倍が定義されている．

例 5.19. (P_n とその部分空間による商線形空間)

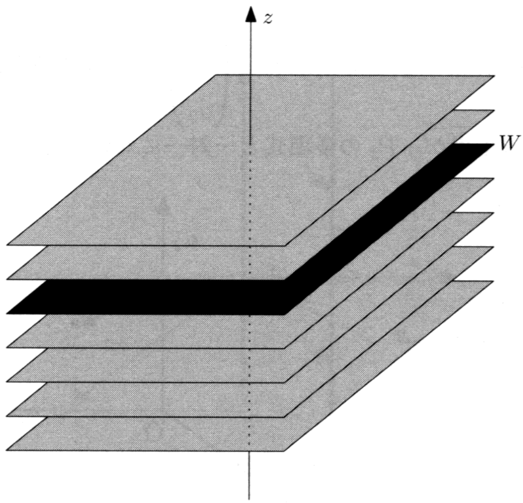


図 5.4 $\mathbb{R}^3/W$ (W の平行移動が $\mathbb{R}^3$ を埋め尽くす).

例 3.5 で定義した多項式による $\mathbb{R}$-線形空間 P_n を思い出そう,

$$P_n = \{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}.$$

さらに, $x^n \in P_n$ が張る空間 $\langle x^n \rangle = \{ cx^n \mid c \in \mathbb{R} \}$ を考える. $\langle x^n \rangle$ は P_n の部分空間である. このとき, P_n の $\langle x^n \rangle$ による商線形空間 $P_n/\langle x^n \rangle$ を作ってみると,

$$\begin{aligned} P_n/\langle x^n \rangle &= \{ (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \langle x^n \rangle \mid a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P_n \} \\ &= \{ (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}) + \langle x^n \rangle \mid a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \in P_{n-1} \} \end{aligned}$$

これは $n = 2$ の例を考えてみるとわかりやすい.

$$\begin{aligned} P_2/\langle x^2 \rangle &= \{ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + \langle x^2 \rangle \mid (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \in P_2 \} \\ &= \{ (a_0 + a_1 x) + \langle x^2 \rangle \mid a_0 + a_1 x \in P_1 \}. \end{aligned}$$

$\varphi : P_2 \to \mathbb{R}^3$ を $\varphi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と定義すると，φ は同型写像であり，$\mathbb{R}^3$ の 1 点が，P_2 の多項式と一対一に対応する (図 5.5).

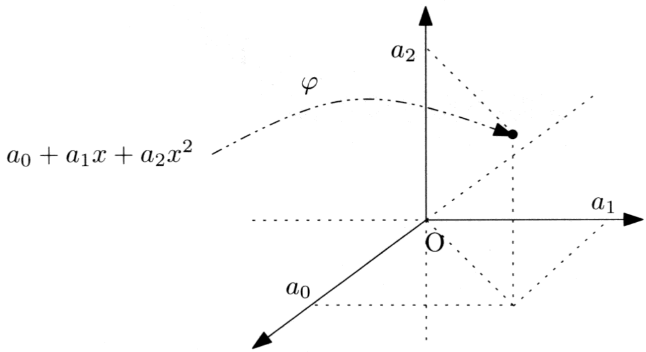


図 5.5　P_2 と $\mathbb{R}^3$ の φ による一対一対応

さて，φ により P_2 の多項式を $\mathbb{R}^3$ の元に対応させた上で考えてみると，$\langle x^2 \rangle$ と $(a_0 + a_1 x) + \langle x^2 \rangle$ はそれぞれ，図 5.6 に示すような直線に対応する．

そして，$\langle x^2 \rangle$ に対応する直線を平行移動して出来るあらゆる直線が，$\mathbb{R}^3$ $(= \varphi(P_2))$ を埋め尽くすのだ．ここで注意してほしい視点は，「$P_2/\langle x^2 \rangle$ では，直線をひとつの元とみなしている」ということである．この視点に立てば，次の同型は明らかだろう．

$$P_2/\langle x^2 \rangle \simeq P_1.$$

こんなふうに，商線形空間 V/W とは「W の平行移動」を「1 つの元とみなす」というイメージで出来上がる，新たな線形空間という感じで直感的に捉えることが出来る．

さて，V を n 次元 $\mathbb{R}$-線形空間，W を m 次元部分空間としよう．W を「1 つの元とみなす」ということは，「m 次元分を 1 点に潰す」という捉え方が

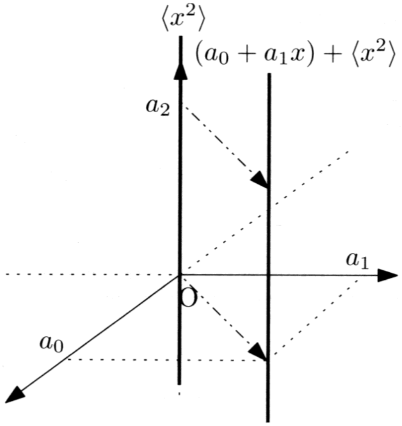


図 5.6 直線 $\langle x^2\rangle$ を a_0+a_1x の分だけ平行移動したのが $(a_0+a_1x)+\langle x^2\rangle$.

できる．これより，V/W の次元はV の次元 n から m を除いたものに等しくなるのでは？という予想ができるのだが，これは実際に成り立つ．

命題 5.20. (V/W の次元)

$$\dim(V/W)=\dim V-\dim W.$$

Proof. $n=\dim V, m=\dim W$ とする．$\dim(V/W)=n-m$ を示せば良い．W の一組の基底 $w_1,w_2,\ldots,w_m$ に定理 3.20 の「基底の延長」を適用すると，$w_1,w_2,\ldots,w_m,u_{m+1},u_{m+2},\ldots,u_n$ が V の基底となるようなベクトルの組 $\underbrace{u_{m+1},u_{m+2},\ldots,u_n}_{n-m\text{ 個}}\in V$ $(u_{m+1},u_{m+1},\ldots,u_n\notin W)$ が存在する．このとき，

$$u_{m+1}+W,u_{m+2}+W,\ldots,u_n+W$$

が V/W の基底となることを示そう．

1. $\underline{\text{任意の } v+W \in V/W \text{ が } u_{m+1}+W, u_{m+2}+W, \ldots, u_n+W \text{ の線形結合で表せる．}}$

   $v+W=(a_1w_1+a_2w_2+\cdots+a_mw_m+a_{m+1}u_{m+1}+\cdots+a_nu_n)+W$
   と書ける．$w \in W \iff w+W=W$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} v+W &= \{\underbrace{(a_1w_1+a_2w_2+\cdots+a_mw_m)}_{\in W}+W\} \\ &\quad + \{(a_{m+1}u_{m+1}+a_{m+2}u_{m+2}+\cdots+a_nu_n)+W\} \\ &= (a_{m+1}u_{m+1}+a_{m+2}u_{m+2}+\cdots+a_nu_n)+W \\ &= a_{m+1}(u_{m+1}+W)+a_{m+2}(u_{m+2}+W)+\cdots+a_n(u_n+W). \end{aligned}$$

   よって，$v+W$ は $u_{m+1}+W, \ldots, u_n+W$ の線形結合で表せる．

2. $\underline{u_{m+1}+W, u_{m+2}+W, \ldots, u_n+W \text{ は線形独立である．}}$
   線形関係式を立てると，

$$c_{m+1}(u_{m+1}+W)+c_{m+1}(u_{m+2}+W)+\cdots+c_n(u_n+W) = \underbrace{W}_{V/W \text{ のゼロベクトル}}$$

   左辺を変形すると，線形関係式は

$$c_{m+1}u_{m+1}+c_{m+1}u_{m+2}+\cdots+c_nu_n \in W$$

   を表すことが分かる．これより，ある $w \in W$ によって

$$c_{m+1}u_{m+1}+c_{m+1}u_{m+2}+\cdots+c_nu_n = w$$

   と書けて，右辺を W の基底 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ の線形結合で表すと，

$$c_{m+1}u_{m+1}+c_{m+1}u_{m+2}+\cdots+c_nu_n = c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_mv_m$$

   右辺を左辺に移項すると，

$$-c_1v_1-c_2v_2-\cdots-c_mv_m+c_{m+1}u_{m+1}+c_{m+1}u_{m+2}+\cdots+c_nu_n = 0_V$$

$v_1, v_2, \ldots, v_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n$ は V の基底なので線形独立であるから，$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = c_{m+1} = \cdots = c_n = 0$.

よって，$u_{m+1} + W, u_{m+2} + W, \ldots, u_n + W$ は線形独立である.

以上より，$u_{m+1} + W, u_{m+2} + W, \ldots, u_n + W$ は V/W の基底なので，$\dim(V/W) = n - m$. □

5.4　線形写像の次元定理

いよいよ，最終目標としていた 1 本の数式

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$$

を証明する準備が整った．ここまでの準備はとても長いものであったが，その結果として得られる証明は，驚くほど明快で，エレガントなものである.

さて，まずは証明の準備として，命題 4.25, 命題 4.28 を思い出すと，線形写像 $f : V \to W$ に対して，$\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ はそれぞれ V, W の部分空間である．これより，商線形空間 $V/\operatorname{Ker} f$ を構成することが出来る.

$$V/\operatorname{Ker} f = \{\, v + \operatorname{Ker} f \mid v \in V \,\}.$$

まずは，2 つの線形空間 $V/\operatorname{Ker} f$ と $\operatorname{Im} f$ の間の驚くべき関係を示そう.

定理 5.21. (準同型定理 線形写像 ver.)[a]

$f : V \to W$ を線形写像とし，$\varphi : V/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ を次のように定義する．

$$\varphi(v + \mathrm{Ker}\, f) = f(v).$$

このとき，φ は同型写像である．すなわち，

$$V/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f.$$

[a] 実はこの定理は，群論における「群の準同型定理」の特殊な場合に相当する．このネーミングのココロはそこにあるのだが，今はこのネーミングについてあまり深く気にすることはない．どうしても気になるのなら，この本を読み終わったら「群論」にレッツチャレンジ．

この定理を証明する前に，まずはこの定理が示している大体のイメージを示しておこう．まず，$\mathrm{Ker}\, f$ を φ によって写してみると，

$$\varphi(\mathrm{Ker}\, f) = 0_W$$

となることが分かる．さらに，今度は任意の $v \in V$ に対して，$v + \mathrm{Ker}\, f$ を φ で写してみると，

$$\varphi(v + \mathrm{Ker}\, f) = f(v)$$

を得る．これはすなわち，φ により，$\mathrm{Ker}\, f$ の平行移動たちは，決まったある 1 点に移されるということを表している (図 5.7)．

ところで，$V/\mathrm{Ker}\, f = \{v + \mathrm{Ker}\, f \mid v \in V\}$ であった．この φ による像 $\varphi(V/\mathrm{Ker}\, f)$ は，各 $v + \mathrm{Ker}\, f$ が 1 点 $f(v)$ に写って出来る集合である．それが実は，$\mathrm{Im}\, f$ と線形空間としての構造も含めて完全に一致する!! というのが，この定理の主張である (図 5.8)．

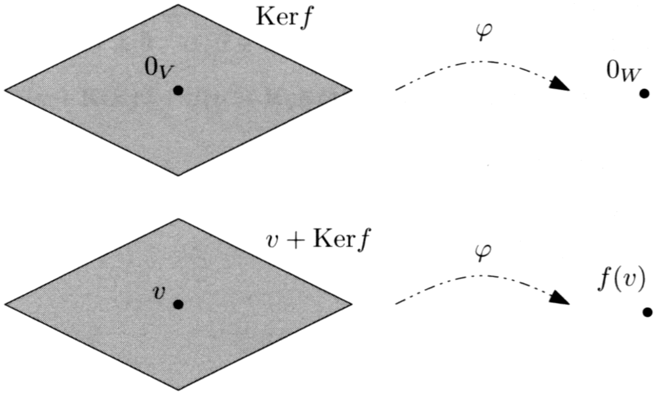


図 5.7 $v + \mathrm{Ker}\, f$ は φ により 1 点 $f(v)$ に写る.

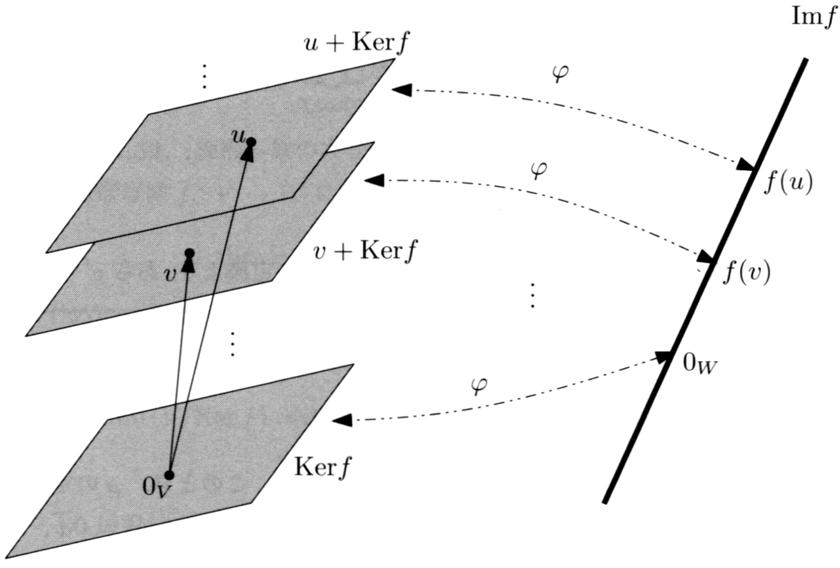


図 5.8 準同型定理 線形写像 ver. のイメージ図

さて，この定理の証明を，今までに準備してきた様々な道具を総動員して完成させよう．

Proof. 示すべきことは以下の 4 つである，

1. φ は well-defined である．
2. φ は全射である．
3. φ は単射である．
4. φ は線形写像である．

順番に示そう．

1. <u>φ は well-defined である．</u>

   $v+\operatorname{Ker} f$ の異なる代表元 $v, v' \in V$ を取る．このとき，$\varphi(v) = \varphi(v')$ を示す．

   $$\begin{aligned}\varphi(v) &= \varphi(v - v' + v') \\ &= f(v - v' + v') = f(\underbrace{v - v'}_{\in \operatorname{Ker} f}) + f(v') = \varphi(v').\end{aligned}$$

   よって，φ は well-defined である．

2. <u>φ は全射である．</u>

   任意の $v \in \operatorname{Im} f$ を取る．このとき，$\operatorname{Im} f$ の定義より，ある $v' \in V$ が存在して $f(v') = v$ を満たす．このとき，$\varphi(v' + \operatorname{Ker} f) = f(v') = v$ なので，φ は全射である．

3. <u>φ は単射である．</u>

   $\varphi(v + \operatorname{Ker} f) = \varphi(v' + \operatorname{Ker} f)$ を仮定する．このとき，φ の定義より，$f(v) = f(v')$ である．f は線形写像なので $f(v - v') = 0_W$．これより，$v - v' \in \operatorname{Ker} f$．よって，$v \in v' + \operatorname{Ker} f$ なので，$v + \operatorname{Ker} f = v' + \operatorname{Ker} f$．よって，$\varphi$ は単射である．

4. <u>φ は線形写像である.</u>

命題 4.23 より，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v + \mathrm{Ker}\, f, v' + \mathrm{Ker}\, f \in V/W$ に対して

$$\varphi(\alpha(v + \mathrm{Ker}\, f) + \beta(v' + \mathrm{Ker}\, f)) = \alpha\varphi(v + \mathrm{Ker}\, f) + \beta\varphi(v' + \mathrm{Ker}\, f)$$

を示せば良い.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha(v + \mathrm{Ker}\, f) + \beta(v' + \mathrm{Ker}\, f)) &= \varphi((\alpha v + \beta v') + \mathrm{Ker}\, f) \\ &= f(\alpha v + \beta v') \\ &= \alpha f(v) + \beta f(v') \\ &= \alpha\varphi(v + \mathrm{Ker}\, f) + \beta\varphi(v' + \mathrm{Ker}\, f).\end{aligned}$$

よって，φ は線形写像である.

以上より，φ は同型写像であり，$V/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f$. □

ここまでくれば,「線形写像の次元定理」は目の前だ.

定理 4.32. (線形写像の次元定理)
線形写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f).$$

Proof. 定理 5.8 より，$V/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f$ である.

$$\begin{aligned}\dim(V/\mathrm{Ker}\, f) &= \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\, f) \quad (\text{命題 5.20 より}) \\ &= \dim(\mathrm{Im}\, f) \quad (V/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f \text{ より}).\end{aligned}$$

よって，$\dim(\mathrm{Ker}\, f)$ を移項して,

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f).$$

を得る. □

5.5 章末問題

1. A と B を集合とし，写像 $f: A \to B$ を考える．$a, b \in A$ に対し，

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} f(a) = f(b)$$

として $\sim$ を定義したとき，$\sim$ は同値関係であることを示せ．

2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ により，2 つの自然数の対の全体[*4]を表すことにする．

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \overset{\text{def}}{=} \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \}.$$

このとき，以下の問に答えよ．

(a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の関係 $\sim$ を以下のように定める．

$$(a, b) \sim (c, d) \overset{\text{def}}{\iff} a - b = c - d.$$

このとき，$\sim$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係であることを示せ．

(b) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ の和と積を次のように定義する．

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \overset{\text{def}}{=} \overline{(a + c, b + d)}, \ \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \overset{\text{def}}{=} \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

このとき，上の和と積は well-defined であることを示せ．

3. V を $\mathbb{R}$-線形空間，W をその部分空間としたとき，$\pi: V \to V/W$ を次のように定義する，

$$\pi(v) = v + W.$$

この π を**標準的な全射 (canonical surjection)** と呼ぶ．

(a) π は全射であることを示せ．

[*4] $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}$ の**直積集合 (direct product set)**

(b) π は線形写像であることを示せ．

4. V, W を $\mathbb{R}$-線形空間，$f : V \to W$ を線形写像とする．以下を示せ．
   (a) f が単射である $\iff$ $\operatorname{rank} f = \dim V$.
   (b) f が全射である $\iff$ $\operatorname{rank} f = \dim W$.

5. 次の行列 A により線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(v) = Av$ と定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

このとき，$\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ の一組の基底と次元を求めよ．

付録 A

一般の体上の線形空間

本書の最後の話題として「一般の体上の線形空間」という話題に触れておこう．今まで我々は，「矢印」としてベクトルを定義し，それを公理化することにより，一般の $\mathbb{R}$-線形空間を考えていた．ここで気になることは，せっかくベクトルを「$\mathbb{R}$-線形空間の元」として抽象的に定義しなおすことにより世界がぐっと広がったのに，

スカラー倍については，$\mathbb{R}$ に固定しっぱなしで良いのか??

ということである．これから，この部分の抽象化について少し触れてみよう．ちなみにこの付録の内容はけっこう高度であり，さらには後半に著者の趣味語りみたいな内容も多く含まれているので，まあ，興味があるという読者にだけ読んでいただければ僕はもう満足である．

A.1 「スカラー倍」再考

まず，$\mathbb{R}$-線形空間の定義 (定義 3.1) の中から，スカラー倍に関係する部分をすべて抜き出してみよう．

2. V は**スカラー倍について閉じている**.
   - V にスカラー (実数) 倍が定義されていて, 次を満たす.

$$\forall v \in V, \forall c \in \mathbb{R},\ cv \in V.$$

3. V は **8 つの代数的性質**を満たす.

   - スカラー倍についての性質

     (v) $\forall v \in V$,
     $1v = v$. (1 倍してもかわらない)

     (vi) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$,
     $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$. (**分配法則**)

     (vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$,
     $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$. (**分配法則**)

     (viii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$,
     $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$. (まとめてスカラー倍できる)

この定義から「スカラー倍」について今一度考えてみると,

- とりあえず, スカラー倍は「定義」する必要がある.
- スカラー同士の「四則演算」くらいはうまく出来てくれると嬉しい ((vi), (viii) にスカラー同士の和, 積が現れているから).
- スカラーとして「0 と 1」が存在してほしい ((v) で 1 が現れているし, ベクトルの「0 倍」もやっぱり考えたい) .

という自然な要求が生まれる (もちろん, $\mathbb{R}$ はこれらの要求をすべて満たしている). そして, 我々はここでふたたび「発想の逆転」にたどり着くのだ.

発想の逆転

上の要求が満たされさえするならば,
ℝ 以外の集合の元によるスカラー倍も考えることができそうだ!!

我々が知っている ℝ 以外の集合の中で,

- 四則演算が自由にできる.
- 「0 と 1」が入っている.

という性質を持つものは何だろう？
最も手頃なのは，やっぱり ℂ だろう.

A.2 ℂ-線形空間

$\mathbb{R}^n$ のときと同様に，$\mathbb{C}^n$ を次のように定義する.

$$\mathbb{C}^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \middle| \; z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

このとき，$\mathbb{C}^n$ の和と「ℂ によるスカラー倍」を次のように定義する.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} w_1 + z_1 \\ w_2 + z_2 \\ \vdots \\ w_n + z_n \end{pmatrix},\ \alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} cz_1 \\ cz_2 \\ \vdots \\ cz_n \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

複素数の和，複素数の積はやはり複素数であることから，$\mathbb{C}^n$ はこの和とスカラー倍について閉じている．さらに，$\mathbb{C}^n$ は「8 つの代数的性質」

- 和についての性質
  (i) ある $0 \in \mathbb{C}^n$ が存在して，任意の $v \in \mathbb{C}^n$ に対して
  $0 + v = v + 0 = v$ を満たす.（**ゼロベクトル**の存在）

(ii) $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $v + (-v) = (-v) + v = 0$ を満たす $(-v) \in \mathbb{C}^n$ (v の**和の逆元**) が存在する.

(iii) $\forall v, w \in \mathbb{C}^n$, $v + w = w + v$. (和について**可換**)

(iv) $\forall u, v, w \in \mathbb{C}^n$, $(u + v) + w = u + (v + w)$. (**結合法則**)

- スカラー倍についての性質

(i) $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $1v = v$. (1 倍してもかわらない)

(ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v \in \mathbb{C}^n$, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$. (**分配法則**)

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall v, w \in \mathbb{C}^n$, $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$. (**分配法則**)

(iv) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v \in \mathbb{C}^n$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$. (まとめてスカラー倍できる)

を満たすことがすぐに分かる. ここまでくれば, 今度は $\mathbb{C}^n$ のこの性質を公理化して「$\mathbb{C}$-線形空間」を作りたくなるのは自然なことだ.

定義 A.1. ($\mathbb{C}$-線形空間)
集合 V が次の性質を満たすとき, V は **$\mathbb{C}$-線形空間 ($\mathbb{C}$-linear space)**, または **$\mathbb{C}$-ベクトル空間 ($\mathbb{C}$-vector space)** であるという. また, V の任意の元を V の**ベクトル (vector)** と呼ぶ.

1. V は**和について閉じている**.
   - V に和 $(+)$ が定義されていて, 次を満たす.

$$\forall v, w \in V,\ v + w \in V.$$

2. V は**スカラー倍について閉じている**.
   - V にスカラー (複素数) 倍が定義されていて次を満たす.

$$\forall v \in V, \forall c \in \mathbb{C},\ cv \in V.$$

3. V は **8 つの代数的性質**を満たす．

- 和についての性質
  - (i) ある $0_V \in V$ が存在して，任意の $v \in V$ に対して $0_V + v = v + 0_V = v$ を満たす．
    (**ゼロベクトル**の存在)
  - (ii) $\forall v \in V$,
    $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$ を満たす $(-v) \in V$
    (v の**和の逆元**) が存在する．
  - (iii) $\forall v, w \in V$,
    $v + w = w + v$. (和について**可換**)
  - (iv) $\forall u, v, w \in V$,
    $(u + v) + w = u + (v + w)$. (**結合法則**)

- スカラー倍についての性質
  - (v) $\forall v \in V$,
    $1v = v$. (1 倍してもかわらない)
  - (vi) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v \in V$,
    $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$. (**分配法則**)
  - (vii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall v, w \in V$,
    $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$. (**分配法則**)
  - (viii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v \in V$,
    $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$. (まとめてスカラー倍できる)

このように，ℂ によるスカラー倍も，上手に定義することが出来た．

A.3　体

「四則演算ができて，0,1 が含まれている」ような集合として，今まで $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ を考えた．今度は，このような性質を持つ集合をもっと一般的に扱うために，**体 (field)** という概念を定義しよう．

定義 A.2. (体)

和 $(+)$ と積 $(\cdot)$ が定義された集合 F が以下の性質を満たすとき，F は $+$ と $\cdot$ について**体 (field)** であると言う．

1. F は $+$ と $\cdot$ について閉じている．

2. 和についての性質
   i. $\forall a, b, c \in F,\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (**結合法則**)
   ii. $\exists 0_F \in F$ s.t. $\forall a \in F, a + 0_F = 0_F + a = a$. (**零元**)
   iii. $\forall a \in F, \exists(-a) \in F$ s.t. $a + (-a) = (-a) + a = 0$. (**和の逆元**)
   iv. $\forall a, b \in F, a + b = b + a$ (和について**可換**)

3. 積についての性質
   i. $\forall a, b, c \in F, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. (**結合法則**)
   ii. $\exists 1_F \in F$ s.t. $\forall a \in F, 1_F a = a 1_F = a$. (積の**単位元**)
   iii. $a \in F, a \neq 0$ なら，$\exists a^{-1} \in F$ s.t. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_F$ (積の**逆元**)
   iv. $\forall a, b \in F, a \cdot b = b \cdot a$. (積について**可換**)

4. 分配法則が成り立つ．すなわち，

$$\forall a, b, c \in F, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

体は「四則演算が自由にできる集合」の公理化である．いくつかの体の例を見てみよう．

例 A.3. ($\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$)

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は，我々が知っている通常の和と積について体となる（体の定義をすべて満たす）．このことにより，$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は**有理数体 (quotient number field)**, **実数体 (real number field)**, **複素数体 (complex number field)** と呼ばれる．

例 A.4. (ガロア体 $\mathbb{F}_p$)

素数 p に対して，集合 $\mathbb{F}_p$ を次のように定義しよう．

$$\mathbb{F}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

このとき，$\mathbb{F}_p$ の和と積を次のように定義する．

$$a \underbrace{+}_{\mathbb{F}_p\text{の和}} b \stackrel{\text{def}}{=} a \underbrace{+}_{\mathbb{Z}\text{ の和}} b \mod p.$$

$$a \underbrace{\cdot}_{\mathbb{F}_p\text{の積}} b \stackrel{\text{def}}{=} a \underbrace{\cdot}_{\mathbb{Z}\text{ の積}} b \mod p.$$

すなわち，「ふつうに足して，mod p」，「ふつうに掛けて，mod p」という和と積を，$\mathbb{F}_p$ の和と積として採用する!! ということだ．例えば $p = 2$ のときの和と積の値は次の通りである[*1]．

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

この和と積について，$\mathbb{F}_p$ は体になる．この体を**標数 (characteristic)** p の**ガロア体 (Galois field)** または**素体 (prime field)** と呼ぶ．

[*1] $\mathbb{F}_2$ の和を**排他的論理和 (exclusive or)** と呼ぶことも多い．

例 A.5. ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ は体ではない)

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ は，通常の和と積について体にはならない．なぜなら，例えば 2 や 3 などは積の逆元を $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ の中に持たないからである．

A.4 一般の体上の線形空間

「四則演算が自由にできて，0 と 1 を持つ集合」を一般的に定義したものが「体」である．一般の体によるスカラー倍を持つような線形空間を定義しよう．

定義 A.6. (F-線形空間)
F を体とする．集合 V が次の性質を満たすとき，V は F-**線形空間** (**F-linear space**)，または F-**ベクトル空間** (**F-vector space**) であるという．F を V の**基礎体** (**ground field**) と呼び，V の任意の元を V の**ベクトル** (**vector**) と呼ぶ．

1. V は**和について閉じている**．
   - V に和 $(+)$ が定義されていて，次を満たす．

$$\forall v, w \in V,\ v + w \in V.$$

2. V は**スカラー倍について閉じている**．
   - V にスカラー倍が定義されていて次を満たす．

$$\forall v \in V, \forall c \in F,\ cv \in V.$$

3. V は **8 つの代数的性質**を満たす.

- 和についての性質

  (i) ある $0_V \in V$ が存在して，任意の $v \in V$ に対して
  $0_V + v = v + 0_V = v$ を満たす.
  (**ゼロベクトル**の存在)

  (ii) $\forall v \in V$,
  $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$ を満たす $(-v) \in V$
  (v の**和の逆元**) が存在する.

  (iii) $\forall v, w \in V$,
  $v + w = w + v$.　(和について**可換**)

  (iv) $\forall u, v, w \in V$,
  $(u + v) + w = u + (v + w)$.　(**結合法則**)

- スカラー倍についての性質

  (v) $\forall v \in V$,
  $1_F v = v$. (1_F 倍してもかわらない)

  (vi) $\forall \alpha, \beta \in F, \forall v \in V$,
  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$. (**分配法則**)

  (vii) $\forall \alpha \in F, \forall v, w \in V$,
  $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$. (**分配法則**)

  (viii) $\forall \alpha, \beta \in F, \forall v \in V$,
  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.　(まとめてスカラー倍できる)

基礎体 F を $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ とおけば，F-線形空間の定義は前述した $\mathbb{R}$-線形空間，$\mathbb{C}$-線形空間の定義と一致する．また，第 3 章, 第 4 章, 第 5 章の内容も，「$\mathbb{R}$-線形空間」を「F-線形空間」に読みかえれば，そのまま F-線形空間の理論

が得られる．

A.5 $\mathbb{F}_2$-線形空間と符号

標数 2 のガロア体 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ を考えよう．$\mathbb{F}_2$-線形空間の理論は特に面白い．

我々が普段使っているコンピュータの中ではすべてのデータが 2 進数 (0 と 1 の列) によって表現される．そして長さ n の 0 と 1 の列というのは，次の集合 $\mathbb{F}_2^n$ の元として数学的に扱うことが出来る．

$$\mathbb{F}_2^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_2 \right\}.$$

この $\mathbb{F}_2^n$ は，次の和とスカラー倍について $\mathbb{F}_2$-線形空間となる．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \ c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{F}_2).$$

つまり，$\mathbb{F}_2$-線形空間 $\mathbb{F}_2^n$ はコンピュータの世界と非常に密接な関わりを持っているのだ．

そして著者は特に「コンピュータの数学」の中で**符号理論 (code theory)** という分野を面白いと思っている（実際に専門分野にしている）．ここから先は著者の趣味みたいな話が少しだけ続くが，著者が特に面白いと信じてやまない数学のお話に，少しだけ付き合ってほしい．

A.5.1 誤り訂正のアイデア (長さ 3 の繰り返し符号)

1948 年，数学者クロード・エルウッド・シャノン (Claude Elwood Shannon) が発表した論文「通信の数学的理論」において，符号理論は産声をあげ

た．符号理論は，データをやりとりする際に生じた「エラー」を受け取った側でうまく訂正する「誤り訂正」と密接な関係を持つが，あまり詳しいことを説明するとキリがなくなってしまうので，ここではアウトラインにしぼってその仕組を解説してみようと思う．

ある長さ 2 の 0,1 の列（メッセージ）を何らかの通信方法で送ることを考えよう．送信者をアリス, 受信者をボブと名付けることにする．

何の問題もなく送信，受信が完了できるのであればそれでオシマイ，で良いのだが，現実の問題として，送信の途中でメッセージに「エラー（間違い)」が混入してしまうことがある (図 A.1)[*2].

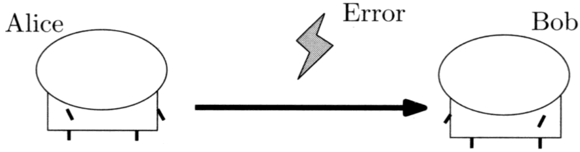


図 A.1　アリスがボブにメッセージを送る．

たとえば，アリスが送りたいメッセージが “00” であるとしよう．もし，このメッセージ “00” を「そのまま」送信したならば，エラーがひとつでも混入してしまった瞬間に，もともとのメッセージが何であったのかがわからなくなってしまう．例えば，アリスが “00” を送信したにもかかわらずボブが “01” を受け取ってしまった（2 文字目にエラーが混入）としても，ボブにはエラーの混入を知る術がない．

伝えたいことはなるべく正確に伝わったほうが良いにきまっているので，どうにかして我々は，

- エラーを「混入させない」ためにはどうすれば良いのか？

*2 ちなみにこの図のキャラクターは「びと」と命名することにしよう．「びと」考案者の山崎将司さんに感謝．

を考えることになる．しかし，エラーの混入を「根本から防ぐ」には，そもそもメッセージの送信につかう通信路を「質の良いもの」にしなければならないので，莫大なコストを要してしまう．さて，どうしたものか？

シャノンが考えたのは，エラーが混入したら，受信した側でそれを訂正すれば良い!!というアイデアだ．そして，シャノンはそれを実現するための具体的なアイデアも提示して見せた．そのアイデアを以下で説明しよう．

アリスが送ることができるメッセージは，00, 01, 10, 11 の 4 つである．アリスはもしこれらのメッセージを「そのまま」送ってしまうと，エラーが混入した途端に，もとのメッセージが何だったのか見当がつかなくなってしまう (図 A.2).

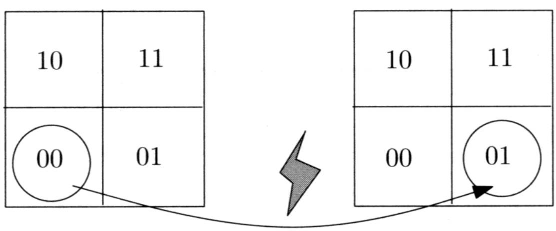


図 A.2 アリスは "00" を送りたかったが，エラーが混入して "01" になってしまった．もう，もとのメッセージが何だったのかは分からない．

そこで，メッセージをそのまま送るのではなく，少し工夫をしよう．

まず，2 文字のメッセージを送信するには，1 文字ずつ 2 回送信すれば良い（たとえば 00 を送るときは，1 回目に 0, 2 回目にも 0 を送る）ので，アリスが送信するメッセージは 1 文字であるとして良い．

そして，アリスは送信したいメッセージの後に，同じメッセージを 2 つくっつけてから送信すると約束をする．例えば，アリスが "0" を送りたいとき，"0" ではなく，"000" を送りますよ，とあらかじめアリスとボブの間で約束を交わしておくわけだ．この約束のもとで，アリスが最終的に送ることができるのは "000" と "111" の 2 つである．

それでは，アリスが “0” を送りたいときのことを考えよう．

1. まず，アリスは約束にもとづいて，“0” ではなく “000” を送信する．

さて，このメッセージに 1 つエラーが混入して “010” となってしまったとしよう．ここでボブは次の推測を行う．

2. ボブは受信したメッセージを見て，0 と 1 のどちらが多いかを数える．
3. この場合は 0 が多いので，もとのメッセージは “000” であった可能性が高い!! と推測し，アリスが送ったのは “000” だったと判断する．

このように，ボブはアリスが送信したメッセージが「多分 “000” だったはずだ」と推測できたことになる．何も工夫をしないで送ったときには出来なかった「エラーの除去」が，このように可能になった．

4. ボブはアリスとの約束にもとづいて，アリスが送ったメッセージは “0” であったと判断する．

「誤り訂正」完了!! である．

A.5.2 誤り訂正のアイデアを数学的に表してみる

さて，このアイデアを数学的に表してみることにしよう．アリスが送信したいメッセージの長さを l とする．このとき，アリスが送信したいメッセージは，$\mathbb{F}_2^l$ の元であるとして良い．

アリスは何らかの規則にしたがって，送信したいメッセージ $m \in \mathbb{F}_2^l$ に k 文字の「冗長な情報」を付け加える．この規則をあらわす写像 (この写像は単射であるとする) を $\varphi : \mathbb{F}_2^l \to \mathbb{F}_2^{l+k}$ と書くことにしよう．アリスは最終的に $\varphi(m) \in \mathbb{F}_2^{l+k}$ をボブに送信することになる (図 A.3)．

アリスが $\varphi(m)$ をボブに送信し，通信中にエラーが混入する．このことは，$\varphi(m)$ にエラーベクトル $e \in \mathbb{F}_2^{l+k}$ が加えられることに相当する (図 A.4)．

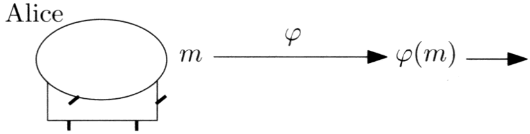


図 A.3 アリスは $\varphi(m) \in \mathbb{F}_2^{l+k}$ をボブに送る.

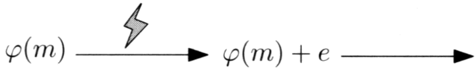


図 A.4 $\varphi(m)$ にエラーが混入して $\varphi(m)+e$ に.

このようにボブは $\varphi(m)+e$ を受け取り，何らかのルールにもとづいて，アリスが最初に送った $\mathbb{F}_2^{l+k}$ の元 $\varphi(m)$ を推測し，それを $\hat{x} \in \mathbb{F}_2^{l+k}$ とする．あとは φ による $\hat{x}$ の逆像 $\varphi^{-1}(\hat{x}) \in \mathbb{F}_2^l$ が，アリスが送信したかったメッセージ m であると推測できる[*3].

定義 A.7. (符号化写像, 符号，符号語)
上記の単射 $\varphi : \mathbb{F}_2^l \to \mathbb{F}_2^{l+k}$ を，**符号化写像 (coding map)** と呼ぶ．また，φ による $\mathbb{F}_2^l$ の像 $\varphi(\mathbb{F}_2^l) \subset \mathbb{F}_2^{l+k}$ を φ により定まる**符号 (code)**[a]と呼ぶ．符号の元を**符号語 (codeword)** と呼ぶ.

[a] 本書では符号をこのように定義するが，一般的には符号を「$\mathbb{F}_2^{l+k}$ の部分集合」として定義することが多い.

[*3] φ を単射とした理由は，この逆像が一意に定まってくれるように，という理由である．もし単射でなかったら，この逆像が 2 通り以上になってしまう可能性が出てくる．こうなってしまうと，ボブは何が正しいのか推測をできなくなってしまうのだ.

今後 $C \overset{\text{def}}{=} \varphi(\mathbb{F}_2^l)$ と置くことにする.

定義 A.8. (誤り訂正，復号化)
受信した語 $\varphi(m) + e \in \mathbb{F}_2^{l+k}$ からエラーを除去し，$\varphi(m) \in C$ を推定することを**誤り訂正 (error correcting)** と呼ぶ．また，$\varphi(m) \in C$ から $m \in \mathbb{F}_2^l$ を得ることを**復号化 (decoding)** と呼ぶ.

復号化は「φ による逆像を求めれば良いだけ」といえばそうなのだが，実際問題として，応用上は符号語の数が多すぎて逆像を求めることがそもそも困難であることが多い．よって，復号化においても，「効率的，現実的に行うための工夫」をする必要が出てくる．符号理論において重要な 2 つのテーマ

- 通信の信頼性を向上させる（誤りをなるべく正確に訂正できる）ような符号化写像 (符号) を探すこと.
- 復号化を効率的に行う手続き（アルゴリズム）を探すこと.

は，今も積極的に研究されているのである.

A.5.3 繰り返し符号

最初に挙げた「1 文字を 3 回続けて送」り，「0 と 1 の多い方を数えて 000 か 111 に復号」という誤り訂正の流れを，先ほどの言葉を使って述べてみよう．以下，$\mathbb{F}_2^n$ の元を, 成分を順番に横に並べて表すことにする．例えば，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \quad \to \quad 010 \in \mathbb{F}_2^3.$$

- 符号化写像 $\varphi : \mathbb{F}_2^1 \to \mathbb{F}_2^3$
  $c \in \mathbb{F}_2^1,\ \varphi(c) = ccc \in \mathbb{F}_2^3 (= \mathbb{F}_2^{1+2})$.

- 誤り訂正のルール
  推定した符号語を $\hat{x} \in \mathbb{F}_2^3$ と置く．

$$\hat{x} = \begin{cases} 000 & (\text{受信語に 0 が多い}) \\ 111 & (\text{受信語に 1 が多い}) \end{cases}.$$

- 復号化
  $000 \to 0, 111 \to 1$ と復号化．

この流れに用いる符号 $C_3 \overset{\text{def}}{=} \varphi(\mathbb{F}_2^1) = \{000, 111\} \subset \mathbb{F}_2^3$ を，**長さ 3 の繰り返し符号 (repetition code)** と呼ぶ．また，同様に任意の自然数 n に対して，**長さ n の繰り返し符号** C_n も定義できる．この「繰り返し符号」は，直感的には「遠くの人に "こんにちは" と伝えたいとき，何度も繰り返して叫べば伝わりやすくなるだろう」という当たり前の気持ちから生まれる符号である．

A.5.4　線形符号

さて，一体これが線形空間と何の関係があるのか？という疑問が生まれてくるわけだが，実は大いに関係している．というのも，数ある符号の中で，特に $\mathbb{F}_2^{l+k}$ の部分空間となるものは，きわめて興味深い性質をたくさん持つのである．

定義 A.9. (線形符号)
符号化写像 $\varphi : \mathbb{F}_2^l \to \mathbb{F}_2^{l+k}$ による符号 $C(= \varphi(\mathbb{F}_2^l))$ が**線形符号 (linear code)** であるとは，C が $\mathbb{F}_2^{l+k}$ の部分空間をなすことである．

これから，非常に有用な線形符号を 2 つほど挙げてみようと思う．線形符

号は本当はここでは紹介できないたくさんの素晴らしい性質を持つ対象なのだが，残念ながら余白が狭すぎるのでここで説明しきることは出来ない．興味があるという読者は，ぜひ符号理論の世界に足を踏み入れよう．

A.5.5 線形符号の構成 (ハミング符号と拡大 2 元ゴレイ符号)

まず，線形符号を実際に構成するための手続きを紹介しよう．

1. まず, 各行が線形独立であるような $\mathbb{F}_2$ の元を成分として持つ $l\times(l+k)$ 行列 $G \in M(l, l+k; \mathbb{F}_2)$ を用意する[*4]．

2. 符号化写像 $\varphi : \mathbb{F}_2^l \to \mathbb{F}_2^{l+k}$ を次のように定義する．

$$m \in \mathbb{F}_2^l,\ \varphi(m) = \underbrace{mG}_{m\ \text{と}\ G\ \text{の積}} \in \mathbb{F}_2^{l+k}.$$

   この φ は明らかに線形写像である[*5]．

3. この φ により符号 $C \overset{\text{def}}{=} \varphi(\mathbb{F}_2^l)$ $(= \mathrm{Im}\,\varphi)$ を作る．命題 4.29 より，この C は $\mathbb{F}_2^{l+k}$ の部分空間，すなわち線形符号である．

定義 A.10. (生成行列)
上記の $G \in M(l, l+k; \mathbb{F}_2)$ を，
線形符号 C の**生成行列 (generator matrix)** と呼ぶ．

[*4] m, n を自然数，X を集合としたとき，$M(m, n; X)$ を X の元を成分としてもつ $m \times n$ 行列の全体として定義する．

[*5] m は横ベクトルであることに注意．

例えば，上記の手続きにおいて，

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M(1, n; \mathbb{F}_2)$$

と置くと，G により得られる線形符号は長さ n の繰り返し符号である．

例 A.11. (ハミング符号)

次の生成行列 $G \in M(4, 7; \mathbb{F}_2)$ により得られる線形符号を
長さ 7 の**ハミング符号 (Hamming code)** と呼ぶ．

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 A.12. (拡大 2 元ゴレイ符号)

次の A により[*6]，生成行列 $\underbrace{G = (E_{12}\ A)}_{E_{12} \text{と}\ A\ \text{を並べる}} \in M(12, 24; \mathbb{F}_2)$ を作り，G による線形符号 G_{24} を，**拡大 2 元ゴレイ符号 (extended binary Golay code)** と呼ぶ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[*6] A は対称行列である．

詳しくは説明しないが，これら 2 つの線形符号は，符号理論において非常に重要な役割を演じる．特に拡大ゴレイ符号は，NASA の宇宙探査計画である「ボイジャー計画」において，誤り訂正に使われたことがある．

もちろん，この付録だけでは符号理論の奥深さ，面白さをすべて語り尽くしたことには到底ならない．が，この付録での話が，ひとりでも符号理論に「興味を持つ」読者を生み出すことがもしできたのなら，僕は本当に嬉しい．

章末問題の解答

第 1 章

1. まず，ベクトルは平行移動をしても同じベクトルを表すことに注意しよう．さらに，$-v$ は v の逆向きのベクトルである．以上と平行四辺形の法則を思い出すと，$v = -a + b, w = -a - b$ が分かる．また，$u = b - w = b - (-a - b) = a + 2b$ である[*7]．

2. ベクトルの和と実数倍は，成分ごとに行なうと定義してあった．

(a) $v + w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1+1 \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(b) $3v = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times (-1) \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(c) $3v - 2w = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) a, b, c は線形独立であることと，任意の $v \in \mathbb{R}^3$ が a, b, c の線形

[*7] こういう問題は，大学入試センター試験の問題集などによく載っている．

結合で表せることを示す.

- <u>線形独立であること</u>

  線形関係式を立てる.

$$c_1a + c_2b + c_3c = 0 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

両辺をベクトルの形で書くと,

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ c_2 + c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

第 3 成分を比較して $c_3 = 0$. 第 2 成分を比較して $c_2 + c_3 = c_2 = 0$. 第 1 成分を比較して $c_1 + c_2 + c_3 = c_1 = 0$ を得るので, a, b, c は線形独立なベクトルの組である.

- <u>任意の $v \in \mathbb{R}^3$ が a, b, c の線形結合で表せること</u>

  任意の $v \in \mathbb{R}^3$ をとり,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

と書くことにする. これを a, b, c の線形結合で表したいので, $v = \alpha a + \beta b + \gamma c$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ と置いて, α, β, γ を決定しよう. 両辺をベクトルの形で書くと,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \beta + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

第 3 成分を比較して, $\gamma = v_3$, 第 2 成分を比較して, $\beta = v_2 - \gamma = v_2 - v_3, \alpha = v_1 - \beta - \gamma = v_1 - (v_2 - v_3) - v_3 = v_1 - v_2$ を得る. よって, $v \in \mathbb{R}^3$ に対して α, β, γ をこのように取れば, v は a, b, c の線形結合で表せる.

(b) 前問より，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha a + \beta b + \gamma c$ と置いたとき，

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - 2 = -1. \\ \beta &= 2 - 3 = -1. \\ \gamma &= 3. \end{aligned}$$

よって，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -a - b + 3c.$

4. 明らかに $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ である．$v_1, v_2, \ldots, v_m$ が $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ の一組の基底であることを示せば，
$\dim \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = m$ が得られる．
仮定より，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は線形独立なベクトルの組である．
さらに，$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ の定義より，任意の $w \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ は $v_1, v_2, \ldots, v_m$ の線形結合で表せる．よって，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ の一組の基底で，$\dim \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = m$ である．

5. 行列の積の定義にしたがって計算しよう．

(a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) ${}^tA{}^tB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $$ {}^tB^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} $$

ちなみにこの結果から，一般に ${}^t(AB) = {}^tB^tA$ が予想できるが，この性質は実際に一般に成り立つ．

6. 1. 数学で何かが「1 通りに定まる」ことを証明するときには，

(i) 2 通りあると仮定する．
(ii) それらが実は同じものになる．

ということを示す流れが定番である．ここでもこれにしたがって証明を行おう．X, Y を A の 2 通りの逆行列とする．このとき，逆行列の定義より，

$$ AX = XA = E $$
$$ AY = YA = E $$

である．よって $AX = AY$ であり，両辺に左から X をかけると，

$$ X(AX) = X(AY) $$
$$ \underbrace{(XA)}_{E} X = \underbrace{(XA)}_{E} Y $$
$$ X = Y. $$

よって，A の逆行列は 1 通りに定まる[*8]．

2. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ を「A^{-1} に A をかけると単位行列になる」というふうに捉えれば，$(A^{-1})^{-1} = A$ が分かる．

[*8] 1 通りに定まるということを，**「一意に定まる」**とも言う．

3. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E, (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E$ であるから，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7. (a) 行列の積の定義にしたがって計算する．

$$A^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = E_3.$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = E_3.$$

(b) 前問より，$A^{-1} = {}^tA$ である．

このように，${}^tAA = A^tA = E$ を満たす行列のことを**直交行列 (orthogonal matrix)** と呼ぶ．直交行列は数学的に面白い性質をたくさん持っている．興味があればぜひ調べてほしい．

第 2 章

1. まず拡大係数行列を作ると，

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

この拡大係数行列に対して前進消去を行おう．

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\substack{1\text{ 行目と} \\ 2\text{ 行目を交換}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 9 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\substack{(2\text{ 行目})- \\ (1\text{ 行目})\times 3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 7 & 21 \end{array}\right)$$

連立方程式の形に戻すと，

$$\begin{cases} x - 2y & = -4 \\ 7y & = 21 \end{cases}$$

を得る．よって，$y = 3, x = 2y - 4 = 2.$

2. 拡大係数行列を作り，行基本変形で 0 の階段を作る．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \end{array}\right)$$

連立方程式の形に戻すと，

$$\begin{cases} x + y - z & = 4 \\ y + 5z & = -3 \\ 20z & = -20 \end{cases}.$$

よって，$z = -1, y = -3 - 5z = 2, x = 4 - y + z = 1.$

3. 拡大係数行列を作り，行基本変形で 0 の階段を作る．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

連立方程式の形に戻すと，

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 4 \\ -x_2 + 2x_3 & = -3 \end{cases}.$$

$x_3 = t\ (\forall t \in \mathbb{R})$ とおくと, $x_2 = 3+2x_3 = 2t+3$. $x_1 = 4-2x_2+x_3 = 4-2(3+2t)+t = 3t-2$.

4. 拡大係数行列を作り，行基本変形で 0 の階段を作る.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

連立方程式の形に戻すと,

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 & = 7 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = -4 \\ x_3 & = -1 \end{cases}.$$

よって $x_3 = -1$. $x_4 = t\ (\forall t \in \mathbb{R})$ と置くと，$x_2 = -4 - x_3 + x_4 = -4+1+t = t-3$. $x_1 = 7 + x_3 - 3x_4 = 7-1-3t = -3t+6$.

5. 線形関係式

$$c_1 u + c_2 v + c_3 w = 0$$

の両辺を行列とベクトルを使って表示すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．これは c_1, c_2, c_3 の等質連立一次方程式なので，掃き出し法を使って c_1, c_2, c_3 を求めれば良い．拡大係数行列に掃き出し法を行なうと，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -1 & -3 & -7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって，$c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 0, c_2 + 2c_3 = 0$ であり，$c_3 = t\ (\forall t \in \mathbb{R})$ とおくと，$c_2 = -2t, c_1 = -2c_2 - 5c_3 = 4t - 5t = -t$. よって，例えば $t = 1\ (\neq 0)$ などと置いても c_1, c_2, c_3 は線形関係式を満たすので，u, v, w は線形従属である．

6. 線形関係式は以下のとおり．

$$c_1 u + c_2 v + c_3 w = 0.$$

両辺を行列とベクトルを使って表すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列を作り，掃き出し法で c_1, c_2, c_3 を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

連立方程式の形になおすと，

$$\begin{cases} c_1 + c_3 & = 0 \\ c_2 & = 0 \\ -2c_3 & = 0 \end{cases}$$

これより，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が得られるので，u, v, w は線形独立である．

7. v を a, b, c の線形結合で表したいので，次のように置いて $\alpha, \beta, \gamma\ (\in \mathbb{R})$ を決定すれば良い．

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = v.$$

両辺を行列とベクトルを使って表すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列を作り，掃き出し法で α, β, γ を求めよう．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -4 & 13 \\ 4 & 5 & -6 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & -9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -15 & -30 & 15 \\ 0 & 15 & 90 & 45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -15 & -30 & 15 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

連立方程式の形に戻すと，

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma & = 4 \\ -\beta - 2\gamma & = 1 \\ \gamma & = 1 \end{cases}.$$

よって，$\gamma = 1, \beta = -1 - 2\gamma = -3, \alpha = 4 - 2\beta - 3\gamma = 4 + 6 - 3 = 7.$
以上より，v は次のように a, b, c の線形結合で表せる．

$$v = 7a - 3b + c.$$

8. $(A \mid E_3)$ に行基本変形を適用して左側を E_3 に変形することは，次のような連立方程式を 3 つまとめて解いていることに相当する．

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

さらに，$(A \mid E_3) \to (E_3 \mid B)$ と変形したとき，B は次のような行列になる (列ベクトルに 3 つの連立方程式の解ベクトルが順番に並ぶ).

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

この B に対して AB を計算してみる (B は列ベクトル x, y, z を用いて $B = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ と表す) と，

$$AB = A\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \underbrace{= \begin{pmatrix} Ax & Ay & Az \end{pmatrix} =}_{\text{行列の積の定義より}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{x,y,z\ \text{は} \\ \text{連立方程式の解}}} = E_3.$$

よって，$B = A^{-1}$ である (ちなみに，問題文でもあらかじめ断ってあるが，$AB = E$ だけが言えてしまえば $BA = E$ となり，$B = A^{-1}$ である．この証明は実はなかなか難しいので，ここでは認めて使ってしまうことにしよう).

この手続を使って，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めてみよう．

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(A|E_3)} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 7 & -5 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{array}\right).$$

よって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -7/2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

9. 前問の手続きをそのまま適用すれば良い．

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

よって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

第3章

1. 「なんだ，こんな性質当たり前じゃないか．」と思ってしまった読者に，「実はそうとも限らないんだな」という注意をしておこうと思う．

もしベクトルが「矢印」で，スカラー倍が「伸縮」という意味を持っているならば，確かにこれらの性質は直感的にも当たり前に成り立つ．しかし，我々が今考えているのは，一般の $\mathbb{R}$-線形空間なのだ．だから，その元が矢印であるとも限らなければ，スカラー倍がそうウマイ意味を持っているとも限らない．つまり，我々は $\mathbb{R}$-線形空間の定義だけを使って，これらの性質を証明しなければならないのだ．数学はあくまで「定義がすべてを語る」ということを，この問題を通じて実感してみてほしい．「厳密な理論展開」とは，そういうものなのだ．

(i) $c0_V = c(0_V + 0_V) = c0_V + c0_V$ である (最初の等号は 0_V の定義，2 つめの等号は線形空間の定義の (vii) による)．両辺に $-c0_V$ を加えると，$\underbrace{(-c0_V) + c0_V}_{0_V} = \underbrace{(-c0_V) + c0_V}_{0_V} + c0_V$ なので，$0_V = 0_V + c0_V = c0_V$．よって，$c0_V = 0_V$．

(ii) $0v = (0+0)v = 0v + 0v$ である (2 つめの等号は線形空間の定義の (vii) より)．両辺に $-0v$ を加えると，$\underbrace{(-0v) + 0v}_{0_V} = \underbrace{(-0v) + 0v}_{0_V} + 0v$ なので，$0_V = 0_V + 0v = 0v$．よって，$0v = 0_V$．

(iii) $c = 0$ なら，$cv = 0v = 0_V$ が前問より得られるので，$c \neq 0$ のとき $v = 0_V$ であることを示せば良い．$c \neq 0$ なので，$\frac{1}{c} \in \mathbb{R}$ を $cv = 0_V$ の両辺にかけると，$\frac{1}{c}(cv) = \frac{1}{c}0_V$．左辺 $= \frac{1}{c}(cv) = (\frac{1}{c}c)v = 1v = v$ (2 つめの等号は線形空間の定義の (viii) より．4 つめの等号は (v) より)．右辺 $= \frac{1}{c}0_V = 0_V$ (本問 (i) より)．よって，$v = 0_V$．

(iv) まず $(-c)v = -(cv)$ を示す．$(-c)v + cv = ((-c)+c)v = 0v = 0_V$．よって，$(-c)v = -(cv)$ である ($(-c)v$ が cv の和の逆元の定義を満たすことを示した)．

次に $c(-v) = -(cv)$ を示す．$c(-v) + cv = c((-v) + v) = c0_V = 0_V$．よって，$c(-v) = -(cv)$．

2. $c_1(x+y) + c_2(x-y) + c_3(x-2y+z) = 0$ のとき，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を示せば良い (線形独立の定義)．左辺を変形すると，

$$(c_1 + c_2 + c_3)x + (c_1 - c_2 - 2c_3)y + c_3 z = 0.$$

x, y, z は仮定より線形独立なので,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

これを解いて，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を得る.

3. $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$ が線形従属であると仮定する．このとき，$c_{n_1} = \cdots = c_{n_k} = 0$ でない係数の組 $c_{n_1}, c_{n_2}, \cdots, c_{n_k}$ があって,

$$c_{n_1}x_{n_1} + c_{n_2}x_{n_2} + \cdots + c_{n_k}x_{n_k} = 0$$

が成り立つ．今，$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$c'_j = \begin{cases} c_{n_i} & (j = n_i) \\ 0 & (j \notin \{n_1, n_2, \cdots, n_k\}) \end{cases}$$

とすると,

$$c'_1x_1 + c'_2x_2 + \cdots + c'_nx_n = 0$$

が満たされて，さらに，$c'_1 = c'_2 = \cdots = c'_n = 0$ ではない.
これは，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ が線形独立という仮定に反するので,
$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$ は線形独立.

4.「同値」であることを示したいので,

(a) $W \subset V$ が部分空間 $\Rightarrow$ 3 つの条件が成立
(b) 3 つの条件が成立 $\Rightarrow W \subset V$ が部分空間

の両方を証明する必要がある.

まず (a) を証明しよう．部分空間の定義より，$0 \in W$.
よって，$W \neq \varnothing$. また，部分空間は定義より和について閉じているので，$\forall a, b \in W,\ a + b \in W$.
また，部分空間は定義よりスカラー倍についても閉じているので,

$\forall a \in W, \forall c \in \mathbb{R}, ca \in W$. これで，(a) が証明できた．

次に (b) を証明しよう．まず，2 つめ，3 つめの条件により，W は和とスカラー倍について閉じている．$W \neq \varnothing$ なので，$x \in W$ を取る．3 つめの条件より，$-x \in W$. 2 つめの条件より，$x + (-x) = 0 \in W$ なので，$0 \in W$ である．さらに，3 つめの条件より，$x \in W$ に対して $-x \in W$ なので，和の逆元が存在．和について可換であることと結合法則は，V が線形空間であり，$W \subset V$ であることから従う．
また，$1a = a$ であること，分配法則，$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ も，V が線形空間であり，$W \subset V$ であることから従う．よって，部分空間の定義が全て示せたので，W は V の部分空間である．

5. $0_W \in V$ なので，$0_V + 0_W = 0_W$ である．さらに，両辺に 0_W を加えると，$0_V + \underbrace{0_W + 0_W}_{0_W} = 0_W + 0_W$. 両辺に 0_W の V での和の逆元 -0_W を加えると，$\underbrace{(-0_W) + 0_W}_{0_V} + 0_V = \underbrace{(-0_W) + 0_W}_{0_V} + 0_W$. よって，$0_V + 0_V = 0_V + 0_W$ で，$0_V, 0_W \in V$ より，$0_V = 0_W$.

6. 連立方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

を掃き出し法を使って解く．

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 30 & 45 & -15 \\ 0 & -45 & 45 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 30 & 0 & 30 \\ 0 & -45 & 45 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

連立方程式に戻すと，

$$x + z = 0, -y + z = 0.$$

$z = t$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) とおくと，

$$x = -t, y = t$$

と書けて，よって，この連立方程式の解は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

である．よって，基底として $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれて，次元は 1 である．

7. 方程式

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

を解く．$x_2 = t, x_3 = s$ ($\forall t, s \in \mathbb{R}$) とおくと，

$$x_1 = 2t - s$$

と書けるので，この方程式の解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるので，L の基底として $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれて，次元は 2 である．

8. 条件を等質連立方程式 (右辺がすべて 0) にすれば良い．そうすれば S は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となる．これは実は，第 4 章で学ぶ「線形写像の核」の言葉を使うと，「S が，条件の連立方程式の係数行列により定

まる線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ の核 $\mathrm{Ker}\,f$ となっているとき」に S は $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっている，と説明することが出来る．

さらに，条件が等質連立方程式でない（連立方程式を行列表示をしたときの右辺の定数ベクトルがゼロベクトルでない）ならば，S は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではないということも言える．なぜなら，この場合ゼロベクトルが S に属さなくなってしまうからである．

第4章

1. (i) 任意の $z\in Z$ に対して，$(g\circ f)(x)=z$ となるような $x\in X$ が存在することを示す．g は全射なので，$\exists y\in Y$ s.t. $g(y)=z$. さらに，f は全射なので，$\exists x\in X$ s.t. $f(x)=y$. この $x\in X$ に対して，

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z.$$

よって，$g\circ f$ は全射である．

(ii) $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$ ならば $x_1=x_2$ であることを示す．仮定より $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ で，g は単射なので，$f(x_1)=f(x_2)$. f は単射なので，$x_1=x_2$. よって，$g\circ f$ は単射である．

(iii) 任意の $z\in Z$ に対して，$g(y)=z$ となるような $y\in Y$ が存在することを示す．$g\circ f$ は全射なので，$\exists x\in X$ s.t. $(g\circ f)(x)=z$. このとき，$y=f(x)\in Y$ とおくと，$g(y)=g(f(x))=(g\circ f)(x)=z$. よって，$g$ は全射である．

(iv) $f(x_1)=f(x_2)$ ならば $x_1=x_2$ であることを示す．$f(x_1)=f(x_2)$ の両辺を g で写すと，$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. 仮定より $g\circ f$ は単射なので，$x_1=x_2$. よって，f は単射である．

2. 解答を述べる前に，数学の証明を行う際にとても大切な証明の方針を述べておく．この流れに沿って証明を行うことはきわめて多いので，必ずこの証明の方法は使えるようになっておいてほしい．

(a) $A \subset B$ を示したいとき．
$\Rightarrow$ 任意の $x \in A$ を取って，$x \in B$ となることを示せば良い． **(部分集合の定義)**

(b) $A = B$ を示したいとき．
$\Rightarrow$ $A \subset B, B \subset A$ の両方を示す．

この証明の方法と，写像の扱いに慣れるために，この問題は最高の練習問題だ．ぜひしっかり理解をしておこう．

(i) 任意の $x \in f(A)$ をとる．このとき，$a \in A$ が存在して，$x = f(a)$ となる．今，仮定より $A \subset X$ なので，$a \in X$ が存在して $x = f(a)$ とも言える． よって，$x \in f(X)$ であるから，$f(A) \subset f(X)$.

(ii) 任意の $x \in f^{-1}(B)$ とすると，$f(x) \in B \subset Y$．よって，$x \in f^{-1}(Y)$ なので，$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Y)$.

(iii) $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ をまず示す, 任意の $x \in f(A_1 \cup A_2)$ をとる．このとき，ある $a \in A_1 \cup A_2$ が存在して, $x = f(a)$ となる．

$$\begin{cases} a \in A_1 \text{のとき，} x \in f(A_1) \\ a \in A_2 \text{のとき，} x \in f(A_2) \end{cases}$$

なので，$x \in f(A_1)$ または $x \in f(A_2)$ となる．すなわち，$x \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

次に，$f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ を示す．
任意の $x \in f(A_1) \cup f(A_2)$ を取る．

$$\begin{cases} x \in f(A_1) \text{ のとき，ある } a \in A_1 \text{があって，} x = f(a). \\ x \in f(A_2) \text{ のとき，ある } a \in A_2 \text{があって，} x = f(a). \end{cases}$$

つまり，

$$\text{ある } a \in A_1 \cup A_2 \text{があって，} x = f(a).$$

であるので，$x \in f(A_1 \cup A_2)$. 以上により，$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ が示せた．

(iv) 任意の $x \in f(A_1 \cap A_2)$ を取る．このとき，ある $a \in A_1 \cap A_2$ があって，$x = f(a)$ となる．いま，$a \in A_1, a \in A_2$ なので，$x \in f(A_1)$ かつ，$x \in f(A_2)$. よって，$x \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

(v) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ をまず示す．任意の $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ を取ると，$f(x) \in B_1 \cup B_2$. すなわち，$f(x) \in B_1$ または $f(x) \in B_2$ となるので，$x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. 次に，$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ を示す．任意の $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ を取ると，$x \in f^{-1}(B_1)$ または $x \in f^{-1}(B_2)$ となる．

$$\begin{cases} x \in f^{-1}(B_1) \text{ のとき，} f(x) \in B_1 \\ x \in f^{-1}(B_2) \text{ のとき，} f(x) \in B_2. \end{cases}$$

よって，$f(x) \in B_1 \cup B_2$ だから，$x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

(vi) まず，$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ を示す．任意の $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ を取ると，$f(x) \in B_1 \cap B_2$ なので，$f(x) \in B_1$ かつ $f(x) \in B_2$. すなわち，$x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. 次に，$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ を示す．任意の $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ を取ると，$x \in f^{-1}(B_1)$ かつ $x \in f^{-1}(B_2)$

なので，$f(x) \in B_1$ かつ $f(x) \in B_2$. よって，$f(x) \in B_1 \cap B_2$. すなわち，$x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

3. $f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V)$ である．両辺に $-f(0_V)$ を加えると，$\underbrace{(-f(0_V)) + f(0_V)}_{0_W} = \underbrace{(-f(0_V)) + f(0_V)}_{0_W} + f(0_V)$. よって，$0_W = 0_W + f(0_V)$ より，$0_W = f(0_V)$ である．

4. $\forall X_1, X_2 \in M_n(\mathbb{R}), \forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$C_A(aX_1 + bX_2) = aC_A(X_1) + bC_A(X_2)$$

を示せば良い．

$$\begin{aligned} C_A(aX_1 + bX_2) &= A(aX_1 + bX_2) - (aX_1 + bX_2)A \\ &= aAX_1 + bAX_2 - aX_1A - bX_2A \\ &= a(AX_1 - X_1A) + b(AX_2 - X_2A) \\ &= aC_A(X_1) + bC_A(X_2). \end{aligned}$$

よって，C_A は線形写像である．

5. 「同値」であることを示したいので，

(a) 線形写像 $f : V \to W$ が単射 $\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$
(b) $\operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow$ 線形写像 $f : V \to W$ が単射

の両方を証明しなきゃいけない．まず (a) を証明しよう．

任意の $v \in \operatorname{Ker} f$ を取る．このとき，$f(v) = 0_W$ であり，さらに，f は線形写像なので，$0_W = f(0_V)$ である．よって，$f(v) = f(0_V)$. f は単射なので，$v = 0_V$ を得る．これより，$\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ である．

次に (b) を証明しよう．今，$\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ という仮定のもとで，任

意の $v, w \in V$ に対して，

$$f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$$

を示せば良い．今，$f(v) = f(w)$ とおくと，f が線形写像であることから，

$$f(v - w) = 0_W$$

となり，$v - w \in \operatorname{Ker} f$．仮定より，$\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ だったので，$v - w = 0_W$. よって，$v = w$ なので f は単射である．

6. まず，$\operatorname{Ker} f$ を求めよう．次の連立方程式の解全体が $\operatorname{Ker} f$ である．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

掃き出し法を用いるまでもなく，$x = y = z = 0$ が得られる．また，w に関しての条件は全くないので，w はどんな値をとっても構わない．すなわち，$w = t$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ と置いて良い．以上より，

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので，$\operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ であり，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} f$ の一組の基底である．よって，$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ も分かる．

次に，$\operatorname{Im} f$ を求めよう．$\operatorname{Im} f$ は列ベクトルが張る空間なので，

$$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．この 3 つのベクトルは明らかに線形独立なので，$\mathrm{Im}\, f$ の一組の基底である．これより，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$.

7. (a) 次の連立方程式の解を求める．

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

掃き出し法を用いてこの解を求めると，次の解を得る．

$$w = 11s - 10t, x = 3s - 2t, y = t, z = s \quad (\forall t, s \in \mathbb{R}).$$

よって，

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11s - 10t \\ 3s - 2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり，$\mathrm{Ker}\, f$ の一組の基底

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られ，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$ である．

(b) $\mathrm{Im}\, f$ は列ベクトルが張る空間なので，

$$\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立であり，任意の 3 つの列ベクトルは線形従属となるので，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の一組の基底である．よって，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$.

8. (a) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

掃き出し法を用いて解を求めると，

$$w = 2s + t, x = -3s - 2t, y = t, z = s \quad (\forall s, t \in \mathbb{R}).$$

よって，

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s + t \\ -3s - 2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

以上より，$\mathrm{Ker}\, f$ の一組の基底として $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれて，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$.

(b) 線形写像の次元定理により，$\dim \mathbb{R}^4 = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$ なので，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 4 - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4 - 2 = 2$. これより，列ベクトルの中で線形独立な 2 本のベクトルを選べばそれは $\mathrm{Im}\, f$ の一組の基底となる．よって，たとえば

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は，$\mathrm{Im}\, f$ の一組の基底である．

9. (a) i. <u>id_V は線形写像</u>

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v, w \in V$ に対して，$\mathrm{id}_V(\alpha v + \beta w) = \alpha v + \beta w = \alpha \mathrm{id}_V(v) + \beta \mathrm{id}_V(w)$ より，id_V は線形写像である．

ii. <u>id_V は単射</u>

$\mathrm{id}_V(v) = \mathrm{id}_V(w)$ とすると，ただちに $v = w$ が得られる．よって，id_V は単射である．

iii. <u>id_V は全射</u>

任意の $v \in V$ に対して，$\mathrm{id}_V(v) = v$ となるので，id_V は全射．以上より，id_V は同型写像である．

(b) i. <u>f^{-1} は線形写像である．</u>

任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v, w \in V$ に対して，$f(\alpha f^{-1}(v) + \beta f^{-1}(w)) = \alpha f(f^{-1}(v)) + \beta f(f^{-1}(w)) = \alpha v + \beta w$. この両辺を f^{-1} で写して，$f^{-1}(\alpha v + \beta w) = \alpha f^{-1}(v) + \beta f^{-1}(w)$ が得られる．

ii. <u>f^{-1} は全単射である．</u>

全単射 f の逆写像 f^{-1} は全単射である[*9]ことから従う．

(c) i. <u>$g \circ f$ は線形写像である．</u>

任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v, w \in V$ に対して，$(g \circ f)(\alpha v + \beta w) = g(f(\alpha v + \beta w)) = g(\alpha f(v) + \beta f(w)) = \alpha (g \circ f)(v) + \beta (g \circ f)(w)$ より，$g \circ f$ は線形写像．

[*9] この証明は写像に慣れるための絶好の練習となるので，読者自身で手を動かして完成させてみてほしい．

ii. $g \circ f$ は全単射である.

本章の章末問題第 1 問より従う.

10. (a) L は線形写像である.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in M_2(\mathbb{R})$, $L(aX + bY) = aL(X) + bL(Y)$ を示せば良い.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

と置くと,

$$aX + bY = \begin{pmatrix} ax_{11} + by_{11} & ax_{12} + by_{12} \\ ax_{21} + by_{21} & ax_{22} + by_{22} \end{pmatrix}$$

また, 任意の $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $L(M)$ を計算してみると,

$$L(M) = (a - b) - (c - d)$$

という結果が得られる. よって, L は結局,「$(1,1)$ 成分から $(1,2)$ 成分を引いたものから, $(2,1)$ 成分から $(2,2)$ 成分を引いたものを引いた値を計算する」という写像だと分かるので,

$$\begin{aligned} L(aX + bY) &= (ax_{11} + by_{11} - ax_{12} - by_{12}) \\ &\quad - (ax_{21} + by_{21} - ax_{22} - by_{22}) \\ &= a\{(x_{11} - x_{12}) - (x_{21} - x_{22})\} \\ &\quad + b\{(y_{11} - y_{12}) - (y_{21} - y_{22})\} \\ &= aL(X) + bL(Y). \end{aligned}$$

よって, L は線形写像である.

ちなみに，tr が線形写像だと知っていれば，この問題はもっと簡単に解ける．

$$\begin{aligned} L(aX+bY) &= \mathrm{tr}(A(aX+bY)) \\ &= \mathrm{tr}(aAX+bAY) = a\mathrm{tr}(AX)+b\mathrm{tr}(AY) \\ &= aL(X)+bL(Y). \end{aligned}$$

(b) W は $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間である．

L は前問により線形写像なので，O (2 次零行列) に対して，$L(O)=0$. よって，$O \in W$. すなわち，$W \neq \varnothing$.

さらに，L が線形写像であることから，任意の $X, Y \in W, c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$L(X+Y) = L(X)+L(Y) = 0, L(cX) = cL(X) = 0.$$

よって，$X+Y, cX \in W$ なので，W は和とスカラー倍について閉じている．よって，W は部分空間．

ちなみに，$W = \mathrm{Ker}\, L$ ということに気づけば，L が線形写像であることと命題 4.25 より，すぐに W が $M(2;\mathbb{R})$ の部分空間であることが分かる．

第 5 章

1. 定義 5.2

(i) $a \sim a$

(ii) $a \sim b \ \Rightarrow \ b \sim a$

(iii) $a \sim b, b \sim c \ \Rightarrow \ a \sim c$

を満たすことを順番に示す．

(i) 任意の $a \in A$ に対して $f(a) = f(a)$ は明らかなので，$a \sim a$.

(ii) $a \sim b$ を仮定すると，$f(a) = f(b)$ であり，明らかに $f(b) = f(a)$ なので $b \sim a$.

(iii) $a \sim b, b \sim c$ を仮定すると，$f(a) = f(b), f(b) = f(c)$. よって，$f(a) = f(c)$ となり，$a \sim c$.

2. (a) 定義 5.2 を順番に示そう.

i. $a - b = a - b$ は明らかなので，$(a, b) \sim (a, b)$.

ii. $(a, b) \sim (c, d)$ を仮定する．$a - b = c - d$ だが，明らかに $c - d = a - b$ でもあるので，$(c, d) \sim (a, b)$ である.

iii. $(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f)$ を仮定する．$a - b = c - d, c - d = e - f$ なので，$a - b = e - f$. よって，$(a, b) \sim (e, f)$.

(b) • 和は well-defined.

$\overline{(a, b)}$ の (a, b) とは異なる代表元 (a', b') を取る．$\overline{(c, d)}$ についても同様に，(c, d) と異なる代表元 (c', d') を取る．このとき，

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} + \overline{(c', d')}$$

を示す (和が代表元の取り方によらない).

和の定義より，$\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a' + c', b' + d')}$，すなわち $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$ を示せば良い．仮定より $(a, b) \sim (a', b'), (c, d) \sim (c', d')$ なので $a - b = a' - b', c - d = c' - d'$ である.

$$\begin{aligned}(a + c) - (b + d) &= (a - b) + (c - d)\\ &= (a' - b') + (c' - d')\\ &= (a' + c') - (b' + d').\end{aligned}$$

以上より，$(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$.

よって，$\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a' + c', b' + d')}$ なので，$\overline{(a, b)} +$

$\overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} + \overline{(c', d')}$ となり well-defined.

- 積は well-defined.

  $(a', b'), (c', d')$ は和のときと同様に取る．このとき，

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} \cdot \overline{(c', d')}$$

を示す（積が代表元の取り方によらない）．

$$\begin{aligned}(ac + bd) - (ad + bc) &= a(c - d) - b(c - d) \\ &= (a - b)(c - d) \\ &= (a' - b')(c' - d') \\ &= (a'c' + b'd') - (a'd' + b'c').\end{aligned}$$

よって，$(ac + bd, ad + bc) \sim (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$ なので，$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')}$．すなわち $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} \cdot \overline{(c', d')}$ となり well-defined.

3. (a) $v + W \in V/W$ とする．このとき，$v \in V$ で，$\pi(v) = v + W$ となるので全射である．

   (b) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in V$ としよう．

$$\begin{aligned}\pi(\alpha u + \beta v) &= (\alpha u + \beta v) + W \\ &= ((\alpha u) + W) + ((\beta v) + W) \\ &= \alpha(u + W) + \beta(v + W) \\ &= \alpha\pi(u) + \beta\pi(v).\end{aligned}$$

   よって，π は線形写像である．

4. (a) まず，f が単射であることは $\operatorname{Ker} f = \{ 0_V \}$ と同値であったことを思い出そう (第 4 章の章末問題 5).
   これより，f が単射 $\iff \dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ が分かる．線形写像の次元定理より，$\operatorname{rank} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker} f)$ なので，f が単射 $\iff \operatorname{rank} f = \dim V - 0 = \dim V$.

   (b) f が全射であることの定義は $\operatorname{Im} f = W$ と同値である．さらにこれは，$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim W$ と同値である．よって，f が全射 $\iff \operatorname{rank} f = \dim W$.

5. 前章の章末問題でこのような問題はさんざん解いたわけだが，ここでもう一度同じような問題を出題した理由は，線形写像の次元定理を使うとこういう問題がかなり楽に解けるようになるということを感じてもらいたかったからだ．まずはとりあえず，前章と同じように $\operatorname{Ker} f$ の基底と次元を求めよう．次の連立方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この連立方程式を掃き出し法を用いて解くと，次の解を得る．

$$w = 2s + t, x = -3s - 2t, y = t, z = s. \quad (\forall t, s \in \mathbb{R}).$$

よって，

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s + t \\ -3s - 2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られるので，$\mathrm{Ker}\, f$ の 1 組の基底として

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を取ることができて，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$ である．

次に $\mathrm{Im}\, f$ の基底と次元が知りたい．前章まででは列ベクトルから線形独立なものを最大本数取り出すという，少々行き当たりばったりなプロセスを踏んでいたのだが，線形写像の次元定理を使うと，

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{4} - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}\, f)}_{2} = 2$$

が分かる．よって，A の列ベクトルから線形独立なものを 2 本選べば，それは $\mathrm{Im}\, f$ の基底になっているのだ．以上より，たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は $\mathrm{Im}\, f$ の一組の基底である．

あとがき

本書は，著者が 2013 年 3 月 12-14 日にかけて釧路工業高等専門学校で行なった，少人数の高専生を対象とする線形空間の入門レクチャーの内容を大幅に加筆，修正して出来上がったものである．

通常の線形代数の入門書であれば必ず取り上げられる「行列式」「固有値」「固有ベクトル」「対角化」などの概念を，本書では意図的に取り上げていない．これは，最初に行なったレクチャーがそのような内容で構成されていたからである．「定番」と呼ばれる内容に触れないということはとても勇気のいることではあったが，「線形空間に最短経路でたどり着く」というスローガンのもと，あえてそぎ落とすものは思い切ってすべてそぎ落とすという選択肢を選ばせてもらったのだ．その結果，「斬新な内容構成」などという理由で書籍化のオファーを頂くことができた．書籍出版は著者の長年の夢であったので，このオファーを頂けたのは本当に嬉しいことだ．

本書で削ぎ落とした「定番の内容」は，当然ながら「要らない」という理由で削ぎ落としたのではない．あくまで「線形空間に最短経路でたどり着く」というスローガンだけを念頭に置けば，まあ経由せずとも問題がないというだけで，本書に載っていないそれらの内容について学ぶことにより，線形代数の世界はより大きく広がる．例えば，「行列式」という言葉を経由すれば第 2 章の内容は驚くほど簡潔になると同時に大きな広がりを見せるし，「固有値，固有ベクトル」を使って構成される線形空間が非常に興味深い性質を持ったりもする．あくまで本書で味わえるのは「線形代数のほんの一部

分」なのだ．が，本書から見える「線形空間」という風景を，ここまで丁寧に解説している書籍というのは，あまり無かったのではないだろうかと自負している．結果として，結構うまく書けたとは思っている．

本書は，とても沢山の方々のご協力を得て，なんとか完成，出版にこぎつけることが出来た．本書の内容をチェックし，沢山のアドバイスを頂いた浅野大樹くん，阿部晋士くん，石井亮太くん，小沼海さん，河野友哉くん，笹森拓也くん，佐藤陽平くん，城崎健くん，鈴木仁哉くん，千葉直也くん，中村聡くん，野村和也くん，山崎将司さん，渡邉創くん (50 音順) に心より感謝申し上げます．特に，研究科の友人たたちのアドバイスの的確さと早さには頭が上がりません．また，3 月 12-14 日の線形代数のレクチャーを聞いて下さった岡久拓人くん，坂井信之くん，中垣和歌さん (50 音順)，母校で線形代数のレクチャーを行う機会を頂いた佐古彰史先生，書籍化のお話を頂いた麻畑仁様に心より，感謝を申し上げます．ありがとうございました．

まだまだ，自分の頭の中の知識を可能な限り面白く，わかりやすい形でアウトプットを続けて行きたいと思う．お読みいただき，どうもありがとうございました．

平成 26 年 3 月 24 日　明松真司

参考文献

[1] 石川 晋, 成 慶明, 『線形代数学大全〈第 1 部〉とことんわかる線形代数学の基礎理論―行列と行列式の理論』, 日本評論社, 2008

[2] 石川 晋, 成 慶明, 『線形代数学大全〈第 2 部〉じっくりまなぶ線形空間論―線形空間と内積空間の初歩理論』, 日本評論社, 2008

[3] 石川 晋, 成 慶明, 『線形代数学大全〈第 3 部〉展望につながる線形代数学の発展理論―行列と線形空間と内積空間の応用理論』, 日本評論社, 2008

[4] 佐武 一郎, 「線型代数学」, 裳華房, 1974

[5] 川久保 勝夫, 「線形代数学（新装版）」, 日本評論社, 2010

[6] 斎藤 毅, 「線形代数の世界-抽象数学の入り口 (大学数学の入門)」, 東京大学出版会, 2007

[7] 長谷川 浩司, 「線型代数 - Linear Algebra」, 日本評論社, 2004

[8] 林 義実, 『ベクトル・行列・行列式 徹底演習』, 森北出版, 2002

[9] 奥村 吉孝, 手嶋 忠之, 『基礎から学び考える力をつける線形代数』, プレアデス出版, 2012

[10] 桂 利行, 「代数学〈1〉群と環 (大学数学の入門)」, 東京大学出版会, 2004

[11] 結城 浩, 「数学ガール」シリーズ, ソフトバンククリエイティブ

[12] 結城 浩, 『数学文章作法 基礎編』, ちくま学芸文庫, 2013

[13] クロード・E・シャノン, 「通信の数学的理論」, ちくま学芸文庫, 2009

[14] 和田山 正, 「誤り訂正技術の基礎」, 森北出版, 2010

[15] 萩原 学, 「符号理論: デジタルコミュニケーションにおける数学」, 日本評論社, 2012

索引

さ

た

は

ま

や

ら

わ

◉著者略歴

明松 真司（あけまつ しんじ）

1989年　北海道釧路市生まれ.
2010年　独立行政法人 釧路工業高等専門学校 情報工学科卒業.
2013年　東北大学 理学部数学科卒業.
2014年　東北大学 理学研究科 数学専攻 博士前期課程在学中.

線形空間論入門

2014年5月2日　第1版第1刷発行

著　者　明松　真司
発行者　麻畑　　仁
発行所　(有)プレアデス出版
〒399-8301 長野県安曇野市穂高有明7345-187
TEL 0263-31-5023　FAX 0263-31-5024
http://www.pleiades-publishing.co.jp
装　丁　松岡　　徹
印刷所　亜細亜印刷株式会社

落丁・乱丁本はお取り替えいたします。定価はカバーに表示してあります。
ISBN978-4-903814-66-7　C3014　Printed in Japan